ගණිතය

11 ශ්‍රේණිය

III කොටස

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සියලු ම පෙළපොත් ඉලෙක්ට්‍රොනික් මාධ්‍යයෙන් ලබා ගැනීමට
www.edupub.gov.lk **වෙබ් අඩවියට පිවිසෙන්න.**

පළමුවන මුද්‍රණය - 2015
දෙවන මුද්‍රණය - 2016
තුන්වන මුද්‍රණය - 2017
හතරවන මුද්‍රණය - 2018
පස්වන මුද්‍රණය - 2019
හයවන මුද්‍රණය - 2020

සියලු හිමිකම් ඇවිරිණි

ISBN 978-955-25-0411-2

අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව විසින්
පානළුව, පාදුක්ක පිහිටි රජයේ මුද්‍රණ නීතිගත සංස්ථාවේ
මුද්‍රණය කරවා ප්‍රකාශයට පත්කරන ලදි.

Published by: Educational Publications Department
Printed by: State Printing Corporation, Panaluwa, Padukka.

ශ්‍රී ලංකා ජාතික ගීය

ශ්‍රී ලංකා මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
සුන්දර සිරිබරිනී, සුරැඳි අති සෝබමාන ලංකා
ධාන්‍ය ධනය නෙක මල් පලතුරු පිරි ජය භූමිය රම්‍යා
අපහට සැප සිරි සෙත සදනා ජීවනයේ මාතා
පිළිගනු මැන අප භක්ති පූජා
නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා
ඔබ වේ අප විද්‍යා - ඔබ ම ය අප සත්‍යා
ඔබ වේ අප ශක්ති - අප හද තුළ භක්ති
ඔබ අප ආලෝකේ - අපගේ අනුප්‍රාණේ
ඔබ අප ජීවන වේ - අප මුක්තිය ඔබ වේ
නව ජීවන දෙමිනේ නිතින අප පුබුදු කරන් මාතා
ඥාන වීර්ය වඩවමින රැගෙන යනු මැන ජය භූමි කරා
එක මවකගෙ දරු කැල බැවිනා
යමු යමු වී නොපමා
ප්‍රේම වඩා සැම භේද දුරැර ද නමෝ නමෝ මාතා
අප ශ්‍රී ලංකා, නමෝ නමෝ නමෝ නමෝ මාතා

අපි වෙමු එක මවකගෙ දරුවෝ
එක නිවසෙහි වෙසෙනා
එක පාටැති එක රුධිරය වේ
අප කය තුළ දුවනා

එබැවිනි අපි වෙමු සොයුරු සොයුරියෝ
එක ලෙස එහි වැඩෙනා
ජීවත් වන අප මෙම නිවසේ
සොඳින සිටිය යුතු වේ

සැමට ම මෙත් කරුණා ගුණෙනී
වෙළී සමගි දමිනී
රන් මිණි මුතු නො ව එය ම ය සැපතා
කිසි කල නොම දිරනා

ආනන්ද සමරකෝන්

පෙරවදන

ලෝකය දිනෙන් දින සංවර්ධනය කරා පියමනින විට අධ්‍යාපන ක්ෂේත්‍රය ද සැමවිටම අලුත් වෙයි. එබැවින් අනාගත අභියෝග සඳහා සාර්ථක ලෙස මුහුණ දිය හැකි ශිෂ්‍ය ප්‍රජාවක් බිහිකරලීමට නම් අපගේ ඉගෙනුම් ඉගැන්වීම් ක්‍රියාවලිය ද නිරතුරුව සාධනීය ප්‍රවේශ වෙත ළඟාවිය යුතු ය. එයට සවියක් වෙමින් නවලොව දැනුම සමීප කරන අතරම, යහගුණයෙන් පිරිපුන් විශ්වීය පුරවැසියන් නිර්මාණය කිරීමට සහයවීම අපගේ වගකීම වේ. ඉගෙනුම් ආධාරක සම්පාදන කාර්යයෙහි සක්‍රිය ලෙස ව්‍යාවෘත වෙමින් අප දෙපාර්තමේන්තුව ඒ සඳහා දායක වනුයේ දූයේ දරුවන්ගේ නැණ පහන් දල්වාලීමේ උතුම් අදිටනෙනි.

පෙළපොතක් යනු දැනුම පිරි ගබඩාවකි. එය විටෙක අප වින්දනාත්මක ලොවකට කැඳවාගෙන යන අතරම තර්ක බුද්ධිය ද වඩවාලයි. සැඟවුණු විභව්‍යතා විකසිත කරවයි. අනාගතයේ දිනෙක, මේ පෙළපොත් හා සබැඳි ඇතැම් මතක, ඔබට සුවයක් ගෙන දෙනු ඇත. මේ අනගි ඉගෙනුම් උපකරණයෙන් ඔබ නිසි පල ලබාගන්නා අතරම තව තවත් යහපත් දැනුම් අවකාශ වෙත සමීප වීම ද අනිවාර්යයෙන් සිදු කළ යුතු ය. නිදහස් අධ්‍යාපනයේ මහරු තිළිණයක් ලෙස නොමිලේ මේ පොත ඔබේ දෝතට පිරිනැමේ. පාඨ ග්‍රන්ථ වෙනුවෙන් රජය වැය කර ඇති සුවිසල් ධනස්කන්ධයට අගයක් ලබා දිය හැක්කේ ඔබට පමණි. මෙම පෙළපොත හොඳින් පරිශීලනය කර නැණ ගුණ පිරි පුරවැසියන් වී හෙට ලොව එළිය කරන්නට ඔබ සැමට දිරිය සවිය ලැබෙන්නැයි සුබ පතමි.

මෙම පෙළපොත් සම්පාදන සත්කාර්යය වෙනුවෙන් අප්‍රමාණ වූ දායකත්වයක් සැපයූ ලේඛක, සංස්කාරක හා ඇගයුම් මණ්ඩල සාමාජික පිරිවරටත් අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුවේ කාර්ය මණ්ඩලයටත් මාගේ ප්‍රණාමය පළකරමි.

පී. එන්. අයිලප්පෙරුම,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව,
ඉසුරුපාය,
බත්තරමුල්ල.
2020. 06. 26

නියාමනය හා අධීක්ෂණය

පී. එන්. අයිලප්පෙරුම - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් ජනරාල්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

මෙහෙයවීම

ඩබ්ලිව්. ඒ. නිර්මලා පියසීලි - අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන කොමසාරිස් (සංවර්ධන)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සම්බන්ධීකරණය

තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

එම්. චන්දිමා කුමාරි ද සොයිසා - නියෝජ්‍ය කොමසාරිස් (2020 නැවත මුද්‍රණය)
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

සංස්කාරක මණ්ඩලය

ආචාර්ය ඩී.කේ. මල්ලව ආරච්චි - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කැලණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය රොමේන් ජයවර්ධන - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ශ්‍රී ධරන් - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
බී.ඩී. චිත්තානන්ද බියන්විල - අධ්‍යක්ෂ, ගණිතය අංශය, අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
ජී.පී.එච්. ජගත් කුමාර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ජාතික අධ්‍යාපන ආයතනය
තනුජා මෛත්‍රී විතාරණ - සහකාර කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

ලේඛක මණ්ඩලය

එච්.එම්.ඒ. ජයසේන - ගුරු උපදේශක, (විශ්‍රාමික)
වයි.වී.ආර්. විතාරම - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, දෙහිඕවිට
ඩබ්.එම්.ඩබ්.සී වලිසිංහ - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, කෑගල්ල
අජිත් රණසිංහ - ගුරු උපදේශක, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, හෝමාගම
අනුර ඩී. වීරසිංහ - ගුරු උපදේශක, (පිරිවෙන්), මාතර දිස්ත්‍රික්කය
ඩබ්ලිව්.එම්.ඩී. ලාල් විජේකාන්ත - ගුරු සේවය, ශාන්ත තෝමස් විද්‍යාලය, ගල්කිස්ස
ආචාර්ය රෝචනා මීගස්කුඹුර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, පේරාදෙණිය විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජේ. රත්නායක - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ජයන්ත සේනාධීර - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, ශ්‍රී ලංකා විවෘත විශ්වවිද්‍යාලය
ආචාර්ය ආර්. ටී. සමරතුංග - ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය, කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය
අයි.එන්. වාගීෂමූර්ති - අධ්‍යක්ෂ (විශ්‍රමික)
ආර්.එස්.ඊ. පුෂ්පරාජන් - සහකාර අධ්‍යක්ෂ, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, පුත්තලම
වී. මුරලි - ගුරු අධ්‍යාපනඥ සේවය, කලාප අධ්‍යාපන කාර්යාලය, වවුනියාව

භාෂා සංස්කරණය

ජයත් පියදසුන් - මාධ්‍යවේදී, කර්තෘ මණ්ඩලය - සිළුමිණ

සෝදුපත් කියවීම

ඩී.යූ. ශ්‍රීකාන්ත එදිරිසිංහ - ගුරු සේවය, ගොඩගම සුභාරතී මහාමාත්‍ය මහා විද්‍යාලය.

රූපසටහන් පිටකවර නිර්මාණය පරිගණක අක්ෂර සංයෝජනය

ආර්.ඩී. තිළිණි සෙව්වන්දි
බී.ටී. චතුරාණි පෙරේරා - පරිගණක සහායක,
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව

පටුන

		පිටුව
17.	පයිතගරස් ප්‍රමේයය	1
18.	ත්‍රිකෝණමිතිය	12
19.	න්‍යාස	41
20.	අසමානතා	56
21.	වෘත්ත චතුරස්‍ර	62
22.	ස්පර්ශක	78
23.	නිර්මාණ	99
24.	කුලක	115
25.	සම්භාවිතාව	126

ලඝුගණක වගුව

පාරිභාෂික ශබ්ද මාලාව

පාඩම් අනුක්‍රමය

පිවිසෙන්න නිදහසේ සතුටින් දැනුම සොයා.. ට... www.e-thaksalawa.moe.gov.lk

The National e-learning Portal for the General Education

සම්පාදක මණ්ඩල සටහන

2015 වර්ෂයේ සිට ක්‍රියාත්මක වන නව විෂය නිර්දේශයට අනුකූලව මෙම පෙළපොත රචනා කර ඇත.

පෙළපොත සම්පාදනය කෙරෙන්නේ සිසුන් වෙනුවෙනි. එබැවින්, ඔබට තනිව කියවා වුව ද තේරුම් ගත හැකි පරිදි සරල ව සහ විස්තරාත්මක ව එය රචනා කිරීමට උත්සාහ ගත්තෙමු.

විෂය සංකල්ප ආකර්ශනීය අන්දමින් ඉදිරිපත් කිරීම සහ තහවුරු කිරීම සඳහා, විස්තර කිරීම්, ක්‍රියාකාරකම්, සහ නිදසුන් වැනි විවිධ ක්‍රම අනුගමනය කළෙමු. තව ද, අභ්‍යාස කිරීමේ රුචිකත්වය වර්ධනය වන පරිදි ඒවා සරල සිට සංකීර්ණ දක්වා අනුපිළිවෙළින් පෙළ ගස්වා තිබේ.

ගණිත විෂයයට අදාළ සංකල්ප දැක්වෙන පද, රාජ්‍ය භාෂා දෙපාර්තමේන්තුව සම්පාදනය කරන ගණිතය පාරිභාෂික පදමාලාවට අනුකූලව භාවිත කළෙමු.

විෂය නිර්දේශයේ 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් ඉගෙන ගැනීමට මින් පෙර ශ්‍රේණිවල දී ඔබ උගත් යම් යම් විෂය කරුණු අවශ්‍ය වේ. එබැවින් එම පෙර දැනුම සිහි කිරීම පිණිස පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස සෑම පරිච්ඡේදයකම ආරම්භයේ දැක්වෙයි. ඒවා මගින් 11 ශ්‍රේණියට අදාළ විෂය කොටස් සඳහා ඔබව සූදානම් කෙරෙනු ඇත.

ඊට අමතරව 10 ශ්‍රේණියේහි පෙළපොත සිසුන් ළඟ තිබෙන බැවින් පෙර දැනුම අවශ්‍ය වන විටදී එය ද භාවිතයට ගනු ඇතැයි අපි බලාපොරොත්තු වෙමු.

පන්තියේ දී ගුරුවරයා විසින් ඉගැන්වීමට පෙර, ඔබ මේ පරිච්ඡේද කියවීමෙන් සහ ඒ ඒ පරිච්ඡේදයේ එන පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස කිරීමෙන්, මේ පොත භාවිතයෙන් උපරිම ඵල ලැබිය හැකි ය.

ගණිත අධ්‍යාපනය ප්‍රීතිමත් සහ ඵලදායක වන්නැයි අපි ප්‍රාර්ථනා කරමු.

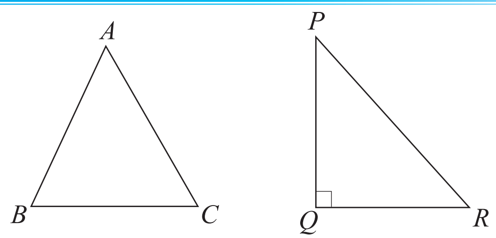
සම්පාදක මණ්ඩලය

17 පයිතගරස් ප්‍රමේයය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- පයිතගරස් ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට
- පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් ගණනය කිරීම්වල යෙදීමට හා අනුමේයයන් සාධනය කිරීමට
- පයිතගරස් ත්‍රිත්ව හඳුනා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

හැඳින්වීම

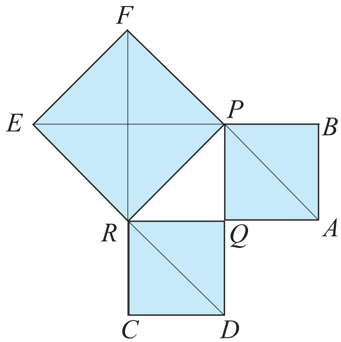


රූපයේ දැක්වෙන ABC, PQR හා KLM ත්‍රිකෝණ පිළිවෙළින් සුළු කෝණික, සෘජු කෝණික හා මහා කෝණික ත්‍රිකෝණ වේ. ඒවායේ ඇතුළත් කෝණවලින්, විශාලත ම කෝණය (හෝ කෝණ) අනුව එසේ වර්ග කර ඇත. මේ අනුව, PQR ත්‍රිකෝණයේ, $P\hat{Q}R$ සෘජුකෝණය එම ත්‍රිකෝණයේ විශාල ම කෝණයයි. එම කෝණයට ඉදිරියෙන් ඇති PR පාදය ත්‍රිකෝණයේ දිගම පාදයයි. එය කර්ණය ලෙසත් ඉතිරි පාද දෙක වන PQ හා QR, සෘජුකෝණය අඩංගු පාද දෙක ලෙසත් හැඳින්වෙන බව අපි දනිමු.

බොහෝ ඈත කාලයක සිට ම මිනිසා ත්‍රිකෝණවල ජ්‍යාමිතික ගුණ පිළිබඳ ව දැන සිටි බවට සාක්ෂි අදටත් ඉතිරි ව පවතී. ක්‍රි.පූ. 3000 දී පමණ ඉදි වූ මිසර පිරමීඩ විශ්මය දනවන නිර්මාණ බව සැම දෙනාගේ ම පිළිගැනීමයි. එම නිර්මාණකරණය සඳහා ජ්‍යාමිතික දැනුම, විශේෂයෙන් ත්‍රිකෝණවල විවිධ ගුණ පිළිබඳ දැනුම, අනිවාර්ය වේ. ක්‍රි.පූ. 1650 දී පමණ කරවූ නිර්මාණයක් ලෙස සැලකෙන ''රයින්ඩ් පැපිරස්'' හි ද වැඩිපුර දක්නට ලැබෙන්නේ ත්‍රිකෝණ රූපයි.

මෙසේ හඳුනාගෙන තිබූ ජ්‍යාමිතික දැනුමෙන් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල පාදවල දිග අතර පවත්නා අපූරු සම්බන්ධතාවක් ක්‍රි.පූ. 6 වන සියවසේ දී පයිතගරස් නම් ග්‍රීක ගණිතඥයා විසින් ඉදිරිපත් කරන ලදී. එම අවධියට පෙර සිටම චීනය, ඉන්දියාව වැනි පෙරදිග රටවල්වල පැවති වෙනත් ශිෂ්ඨාචාර අතර ද එම සම්බන්ධතාව දැන සිටි බවට සාක්ෂි ඇතත් මෙම සම්බන්ධතාව මුල්වරට ජ්‍යාමිතිකව සාධනය කරන්නට ඇත්තේ පයිතගරස් නම් ගණිතඥයා විසින් යැයි සැලකේ. පසු කාලීනව ක්‍රි.පූ. 3 සියවසේ දී යුක්ලිඩ් නම් ගණිතඥයා විසින් මෙම ප්‍රතිඵලය සාධනයක් ද සහිතව ප්‍රමේයයක් වශයෙන් තමාගේ The Elements නම් ඓතිහාසික ග්‍රන්ථයට ඇතුළත් කළේ ය.

17.1 පයිතගරස් ප්‍රමේයය



සමද්විපාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ හැඩැති එක ම හැඩයේ හා ප්‍රමාණයේ පිඟන් ගඩොල් අල්ලන ලද ගෙබිමක කොටසක් රූපයේ දැක්වේ. එහි PQR සමද්විපාද සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ කොටස පිළිබඳ ව සළකා බලමු. එහි PQ එක් පාදයක් වන සේ $PQAB$ සමචතුරස්‍රය ද, RQ එක් පාදයක් වන සේ $RCDQ$ සමචතුරස්‍රය ද (නිල් පාටින් දක්වා ඇති ප්‍රදේශ) ඇඳ ඇත. PQ පාදය මත ඇති සමචතුරස්‍රයට පිඟන් ගඩොල් දෙකකින් වැසෙන වර්ගඵලයක් ද QR පාදය මත ඇති සමචතුරස්‍රයට ද පිඟන් ගඩොල් දෙකකින් වැසෙන වර්ගඵලයක් ද අයත් වන අතර, PR කර්ණය මත ඇති $PREF$ සමචතුරස්‍රයට පිඟන් ගඩොල් හතරකින් වැසෙන වර්ගඵලයක් අයත් වේ. ඒ අනුව PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, පාද තුන මත පිහිටි සමචතුරස්‍ර සඳහා

$PQAB$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $+$ $RCDQ$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $=$ $PREF$ සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය

යන සම්බන්ධතාව වලංගු බව පෙනේ.

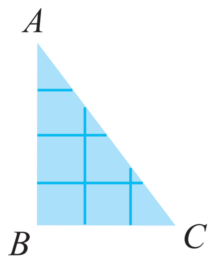
මෙම සම්බන්ධතාව පහත දැක්වෙන ක්‍රියාකාරකමෙන් තව දුරටත් තහවුරු කර ගනිමු.

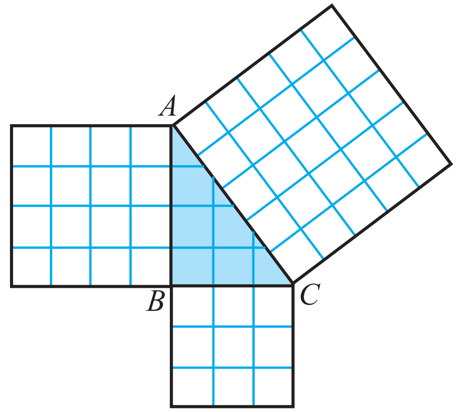
ක්‍රියාකාරකම

කොටුරූල් කඩදාසියකින් පහත දැක්වෙන ප්‍රමාණයේ සමචතුරස්‍ර හැඩ තුනක් හා ත්‍රිකෝණ හැඩයක් කපා ගන්න.

(i) පැත්තක් කොටු තුනක දිගින් යුත් සමචතුරස්‍ර හැඩයක්
(ii) පැත්තක් කොටු හතරක දිගින් යුත් සමචතුරස්‍ර හැඩයක්
(iii) පැත්තක් කොටු පහක දිගින් යුත් සමචතුරස්‍ර හැඩයක්
(iv) සෘජුකෝණය අඩංගු පාද කොටු 3ක් හා 4ක් වූ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ හැඩයක්

සුදු කඩදාසියක, සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ හැඩය අලවා ගෙන, එහි එක් එක් පාද මත අනෙක් සමචතුරස්‍ර හැඩ රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට තබා අලවන්න.





ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ AB පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය } = හතරැස් කොටු 16

BC පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = හතරැස් කොටු 9

AC පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය = හතරැස් කොටු 25

ඒ අනුව ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාද වන AB හා BC පාද මත සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුව } = හතරැස් කොටු $16 + 9$

= හතරැස් කොටු 25

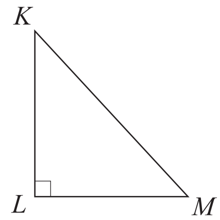
ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය වූ AC පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය } = හතරැස් කොටු 25

එබැවින්, ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, සෘජුකෝණය අඩංගු පාද වන AB හා BC මත සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුව, කර්ණය වන AC මත පිහිටන සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලයට සමාන වේ.

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ සම්බන්ධයෙන් බොහෝ ඈත අතීතයේ සිට ම දැන සිටි මෙම සම්බන්ධතාව, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත පරිදි ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

පයිතගරස් ප්‍රමේයය:
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳින ලද සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය, සෘජුකෝණය අඩංගු ඉතිරි පාද මත ඇඳින ලද සමචතුරස්‍රවල වර්ගඵලවල එකතුවට සමාන වේ.

රූපයේ දැක්වෙන KLM සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය KM ද සෘජුකෝණය අඩංගු පාද KL හා LM ද වන විට,



KL පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= KL^2$

LM පාදය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= LM^2$

KM කර්ණය මත සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය $= KM^2$

එවිට පයිතගරස් ප්‍රමේයය අනුව;

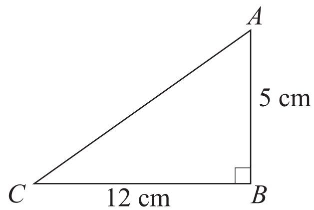
$$KL^2 + LM^2 = KM^2$$

තව ද ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක දිගෙහි වර්ගවල එකතුව අනෙක් පාදයේ දිගෙහි වර්ගයට සමාන වේ නම් එම ත්‍රිකෝණය සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් වේ.

පයිතගරස් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් සිදුකරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B} = 90^\circ$ ද $AB = 5$ cm ද $BC = 12$ cm ද වේ. AC පාදයේ දිග ගණනය කරන්න.



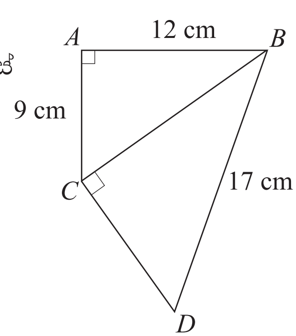
පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 \\ &= 169 \\ \therefore \quad AC &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$\therefore$ AC පාදයේ දිග 13 cm වේ.

නිදසුන 2

රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව CD දිග සොයන්න.



රූපයට අනුව, ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සලකා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 \\ &= 225 \\ \therefore \quad BC &= \sqrt{225} \\ &= 15 \end{aligned}$$

නැවතත් BCD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සලකා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්,

$$CD^2 + BC^2 = BD^2$$
$$CD^2 + 15^2 = 17^2$$
$$CD^2 + 225 = 289$$
$$\therefore \quad CD^2 = 289 - 225$$
$$= 64$$
$$\therefore \quad CD = 8$$

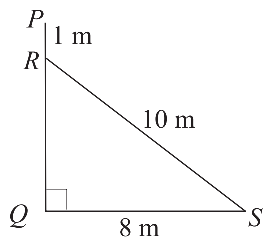
$\therefore$ CD පාදයේ දිග 8 cm වේ.

දැන් ප්‍රායෝගික ගැටලු විසඳීම සඳහා පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා ගන්නා අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 3

සිරස් විදුලි කණුවක මුදුනේ සිට 1 m පහළින් වූ මුදුවකට ගැට ගසා ඇති කම්බියක අනෙක් කෙළෙවර, කණුව පාමුල සිට 8 m ඈතින් සවිකර තිබූ තවත් මුදුවකට ගැට ගසා ඇත. මුදු දෙක අතර වූ කම්බියේ දිග 10 m නම්, කණුවේ උස සොයන්න (කම්බිය හොඳින් ඇදී ඇතැයි උපකල්පනය කරන්න).

දී ඇති තොරතුරු අනුව රූපය අඳිමු.



PQ කණුව සිරස් නිසා, තිරස් පොළොව සමග සෘජුකෝණයක් සෑදේ. එනම්, $P\hat{Q}S = 90^\circ$ කි.

QRS සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් නිසා, පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව,

$$QR^2 + QS^2 = RS^2$$
$$QR^2 + 8^2 = 10^2$$
$$QR^2 + 64 = 100$$
$$\therefore \quad QR^2 = 100 - 64$$
$$QR^2 = 36$$
$$\therefore \quad QR = 6$$

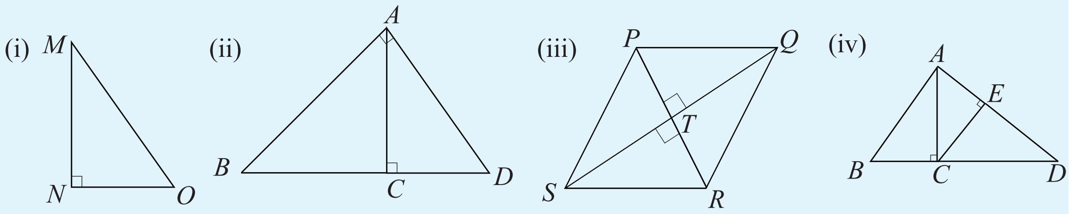
$\therefore$ කණුවේ උස $= QR + PR$
$= 6 + 1$
$= 7$

$\therefore$ කණුවේ උස 7 m වේ.

දැන් පයිතගරස් ප්‍රමේයය යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙමු.

17.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූපයට අදාළ හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.



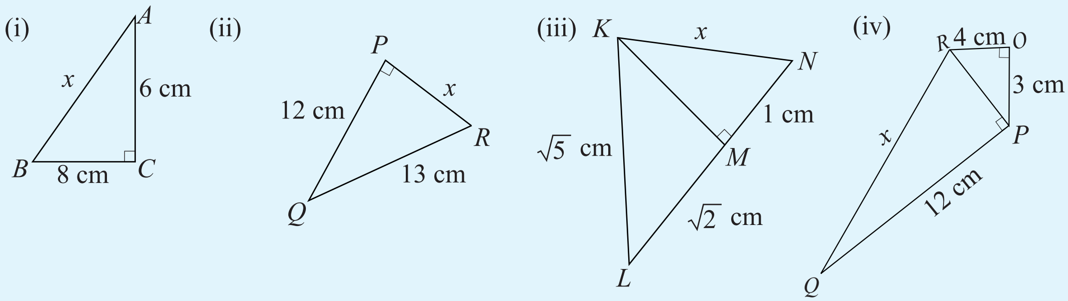
(i) $MO^2 = ... + ...$

(ii) $BD^2 = ... + ...$
$.... = AC^2 + CD^2$
$AB^2 = AC^2 + ...$

(iii) $PQ^2 = ... + ...$
$QR^2 = ... + ...$

(iv) $AB^2 = ... + AC^2$
$.... = AE^2 + EC^2$
$AD^2 = AC^2 + ...$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ x මගින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

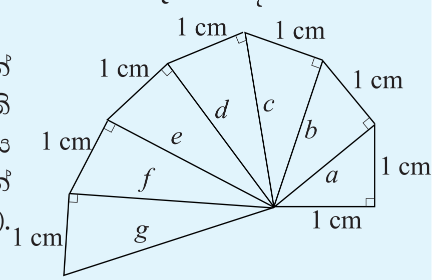


3. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය D වේ. ත්‍රිකෝණයේ පාදයක දිග 2 cm නම් AD පාදයේ දිග සොයන්න (පිළිතුරු කරණී ආකාරයෙන් දක්වන්න).

4. තිරස් පොළොව මත පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක සිට උතුරට 15 m ගමන් කර එතැන් සිට නැගෙනහිර දිශාවට 8 m ගමන් කිරීමෙන් Q ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වේ.
(i) ඉහත තොරතුරු දළ රූප සටහනක දක්වන්න.
(ii) PQ දුර සොයන්න.

5. රොම්බසයක විකර්ණ දෙකෙහි දිග 12 cm හා 16 cm වේ. එහි පැත්තක දිග සොයන්න.

6. රූපයේ දැක්වෙන්නේ ආකිමිඩීස් සර්පිලය නමින් හැඳින්වෙන විශේෂ නිර්මාණයකි. එහි දී ඇති මිනුම් අනුව එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය ඇසුරෙන් a, b, c, d, e, f හා g වල අගයන් සොයන්න (පිළිතුරු කරණී ආකාරයෙන් දක්වන්න).

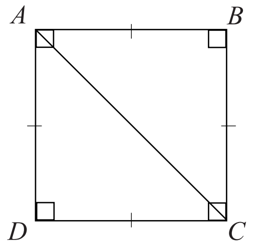


17.2 පයිතගරස් ප්‍රමේයයේ භාවිත තවදුරටත්

පයිතගරස් ප්‍රමේයය සම්බන්ධ අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

ABCD සමචතුරස්‍රයකි. $AC^2 = 2AB^2$ බව සාධනය කරන්න.



සාධනය: $A\hat{B}C = 90^\circ$ නිසා

ABC යනු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයකි.

ABC ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = AB^2 + AB^2 \quad (AB = BC, \text{ සමචතුරස්‍රයේ පාද})$$

$$\therefore \underline{\underline{AC^2 = 2AB^2}}$$

නිදසුන 2

ABCD රොම්බසයේ *AC* හා *BD* විකර්ණ *O* හි දී ඡේදනය වේ. $AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$ බව සාධනය කරන්න.

සාධනය: *ABCD* යනු රොම්බසයක් නිසා විකර්ණ සෘජුකෝණීව සමච්ඡේද වේ. (රූපය බලන්න.)

$\therefore\ A\hat{O}B = 90^\circ$ ද $AO = OC$ ද $BO = OD$ ද වේ.

පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව; *AOB* සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ

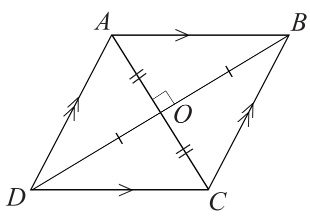
$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 = AB^2$$

$$\frac{1}{4}AC^2 + \frac{1}{4}BD^2 = AB^2$$

$$\frac{1}{4}(AC^2 + BD^2) = AB^2$$

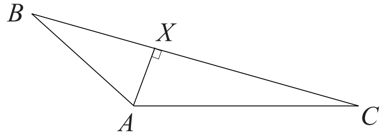
$$\therefore \underline{\underline{AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2}}$$



නිදසුන 3

ABC ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C$ මහා කෝණයක් වේ. A සිට BCට ලම්බව AX ඇඳ ඇත.
$AB^2 - AC^2 = BX^2 - CX^2$ බව සාධනය කරන්න.

සාධනය:

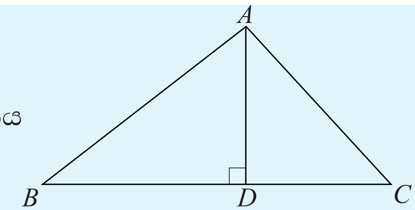


AXB සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව
$AB^2 = AX^2 + BX^2$ —— ①
AXC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව
$AC^2 = AX^2 + CX^2$ —— ②

① − ② ; $AB^2 - AC^2 = AX^2 + BX^2 - (AX^2 + CX^2)$
$= AX^2 + BX^2 - AX^2 - CX^2$
$= \underline{\underline{BX^2 - CX^2}}$

ඉහත නිදසුන්වල දැක්වෙන ආකාරයට, පහත අභ්‍යාසයේ දැක්වෙන අනුමේයයන් සාධනය කරමු.

17.2 අභ්‍යාසය

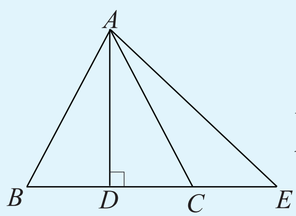


1. ABC ත්‍රිකෝණයේ AD උච්චයකි. (රූපය බලන්න)
$AD = DC$ නම්, $AB^2 = BD^2 + DC^2$ බව සාධනය කරන්න.

2. ABC ත්‍රිකෝණයේ AD උච්චයකි. $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ බව සාධනය කරන්න.

3. ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ AD උච්චයකි. $4\,AD^2 = 3\,BC^2$ බව සාධනය කරන්න.

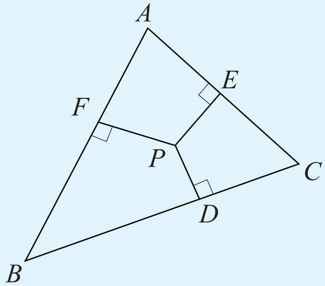
4.



රූපයේ දැක්වෙන ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයේ, AD උච්චයකි. $DC = CE$ වන සේ BC පාදය E තෙක් දික් කර ඇත. $AE^2 = 7\,EC^2$ බව සාධනය කරන්න.

5. $ABCD$ චතුරස්‍රයේ විකර්ණ O හි දී සෘජුකෝණී ව ඡේදනය වේ.
$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ බව සාධනය කරන්න.

6. O යනු $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍රය තුළ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. $AO^2 + CO^2 = BO^2 + DO^2$ බව සාධනය කරන්න. (ඉඟිය: $ABCD$ හි ඕනෑ ම පාදයකට සමාන්තරව O හරහා රේඛාවක් අඳින්න)

7. 

ABC ත්‍රිකෝණය තුළ P ලක්ෂ්‍යය පිහිටා තිබේ. P සිට BC, AC හා AB පාදවලට අඳින ලද ලම්බවල අඩි පිළිවෙළින් D, E හා F වේ.

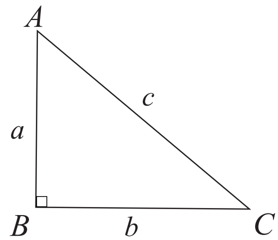
(i) $BP^2 - PC^2 = BD^2 - DC^2$ බවත්

(ii) $BD^2 + CE^2 + AF^2 = CD^2 + AE^2 + BF^2$ බවත්

සාධනය කරන්න.

8. ABC සරල රේඛාවේ එකම පැත්තේ $ABXY$ හා $BCPQ$ සමචතුරස්‍ර දෙක පිහිටා ඇත. $PX^2 + CY^2 = 3\,(AB^2 + BC^2)$ බව සාධනය කරන්න.

17.3 පයිතගරස් ත්‍රිත්ව



රූපයේ දැක්වෙන ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ සෘජුකෝණය අඩංගු පාදවල දිග ඒකක a හා ඒකක b ද කර්ණයේ දිග ඒකක c ද වූ විට පයිතගරස් ප්‍රමේයයට අනුව $a^2 + b^2 = c^2$ වන බව අපි දනිමු. මේ ආකාරයට $a^2 + b^2 = c^2$ සමීකරණය තෘප්ත වන a, b හා c අගයයන් **පයිතගරස් ත්‍රිත්ව** ලෙස හැඳින්වේ.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ වන නිසා (3, 4, 5) පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි. (3, 4, 5) යන ත්‍රිත්වයේ ඕනෑම ගුණාකාරයක් ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයක් වේ.

උදා: (3, 4, 5) හි දෙකෙහි ගුණාකාර වන්නේ (6, 8, 10)

$6^2 + 8^2 = 10^2$ වන නිසා (6, 8, 10) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි. (3, 4, 5) හි තුනෙහි ගුණාකාර වන්නේ (9, 12, 15). $9^2 + 12^2 = 15^2$. එබැවින් (9, 12, 15) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි. මෙවැනි (3, 4, 5) හි ගුණාකාර හැර වෙනත් පයිතගරස් ත්‍රිත්ව ද පවතී.

උදා: $5^2 + 12^2 = 13^2$ වන නිසා, (5, 12, 13) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.
$8^2 + 15^2 = 17^2$ වන නිසා, (8, 15, 17) ද පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.

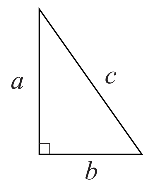
මෙවැනි ඕනෑ ම පයිතගරස් ත්‍රිත්වයක ගුණාකාර ද පයිතගරස් ත්‍රිත්ව වේ.
පයිතගරස් ත්‍රිත්ව ලබා ගැනීම සඳහා යුක්ලීඩ් නම් ගණිතඥයා විසින් "**පරාමිතික සමීකරණ**" හඳුන්වා දී ඇත. x හා y ලෙස වූ ඕනෑම සංඛ්‍යා දෙකක් $a = x^2 - y^2$ ද $b = 2\,xy$ ද $c = x^2 + y^2$ ද ලෙස ගත් විට a, b හා c සඳහා ලැබෙන්නේ පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.

උදා: $x = 6, y = 5$, වූ විට $a = x^2 - y^2 = 6^2 - 5^2 = 11$

$b = 2xy = 2 \times 6 \times 5 = 60$

$c = x^2 + y^2 = 6^2 + 5^2 = 61$ ලැබේ.

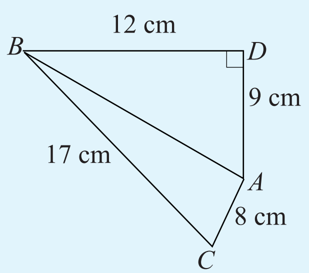
එවිට (11, 60, 61) පයිතගරස් ත්‍රිත්වයකි.



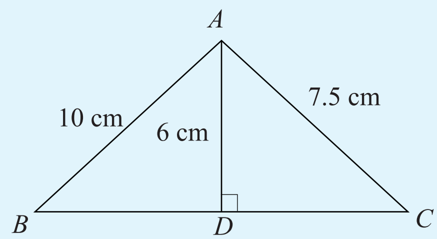
17.3 අභ්‍යාසය

1. (i) (8, 15, 17)   (ii) (14, 18, 25) ලෙස දැක්වෙන්නේ ත්‍රිකෝණ දෙකක පාදවල මිනුම් නම් එම ත්‍රිකෝණ දෙකෙන්, සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් වන්නේ කවර ත්‍රිකෝණය දැයි තෝරන්න. ඒ අනුව, "පයිතගරස් ත්‍රිත්වය" ලියා දක්වන්න.

2. (i) හා (ii) රූපවල දක්වා ඇති මිනුම් අනුව එක් එක් රූපයේ $B\hat{A}C$ සෘජුකෝණයක් බව පෙන්වන්න.



(i)



(ii)

3. පහත දැක්වෙන වගුව සම්පූර්ණ කරමින් "පයිතගරස් ත්‍රිත්ව"සොයන්න. ඔබේ පිළිතුරු සනාථ කරන්න.

x	y	x^2	y^2	a	b	c	පයිතගරස් ත්‍රිත්වය
				$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^2 + y^2$	
2	1						
5	4						
4	3						
6	5						
7	5						

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට 9 cm දුරින් පිහිටි AB ජ්‍යායක දිග 24 cm වේ. වෘත්තයේ අරය සොයන්න.

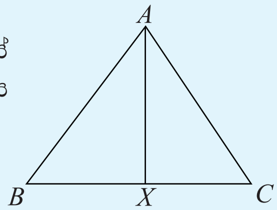
2. $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm හා $\hat{B}$ සෘජුකෝණයක් වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. ඔබ අඳින ලද ත්‍රිකෝණය අදාළ කර ගනිමින් $\sqrt{13}$ හි අගය පළමු දශමස්ථානයට සොයන්න.

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් දිග සහිත රේඛා ඛණ්ඩ නිර්මාණය කරන්න.

(i) $\sqrt{8}$ cm (ii) $\sqrt{10}$ cm (iii) $\sqrt{41}$ cm

4. ABC යනු සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය E ද වේ. $16\ AE^2 = 7AB^2$ බව සාධනය කරන්න.

5. ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ සුළු කෝණයකි. A සිට BCට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය X වේ. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC.BX$ බව සාධනය කරන්න.



18 ත්‍රිකෝණමිතිය

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

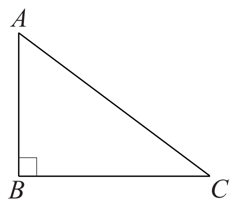
- ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වන සයිනය, කෝසයිනය හා ටැංජනය හඳුනා ගැනීමට
- සයින්, කෝසයින් හා ටැංජන් වගු භාවිත කර ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත ගණනය කිරීම් සිදු කිරීමට
- ත්‍රිකෝණමිතික ගැටලුවල විසඳුම් පරීක්ෂා කිරීම සඳහා විද්‍යාත්මක ගණක යන්ත්‍රය යොදා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

18.1 සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද දෙකක දිග දුන් විට, ඉතිරි පාදයේ දිග සොයා ගැනීමට පයිතගරස් සම්බන්ධය යොදා ගත හැකි බව අපි දනිමු.

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක එක් පාදයක දිග හා සෘජුකෝණය හැර වෙනත් කෝණයක විශාලත්වය දී ඇති විට, ත්‍රිකෝණයේ ඉතිරි පාදවල දිග ලබා ගැනීමට පයිතගරස් සම්බන්ධයෙන් නොහැකි ය. ඒ සඳහා ක්‍රමයක් හඳුනා ගැනීම පිණිස, මුලින් ම සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක පාද නම් කරන ආකාරය හඳුනා ගනිමු.



ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ සෘජුකෝණයකි. එවිට, $\hat{A}$ හා $\hat{C}$ සුළු කෝණ දෙකක් වේ. සෘජුකෝණය වන $\hat{B}$ට ඉදිරියෙන් ඇති AC පාදය කර්ණය ලෙස හැඳින්වේ. ත්‍රිකෝණයේ අනික් කෝණ දෙකෙන් එකක් වන $\hat{C}$ ගත්විට, ඊට ඉදිරියෙන් පිහිටි AB පාදය, $\hat{C}$ හි සම්මුඛ පාදය ලෙස හැඳින්වේ. තවද $\hat{C}$ හි බාහු දෙකෙන් එකක් වූ ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නොවන පාදය වන BC පාදය, $\hat{C}$ හි බද්ධ පාදය ලෙස හැඳින්වේ.

ඒ අනුව, $\hat{A}$ සැලකූ විට පෙර පරිදි ම, ඊට ඉදිරියෙන් පිහිටි BC පාදය $\hat{A}$ හි සම්මුඛ පාදයත්, ත්‍රිකෝණයේ කර්ණය නොවන, $\hat{A}$ හි බාහුවක් වන AB පාදය $\hat{A}$ හි බද්ධ පාදයත් වේ.

මේ අනුව රූපයේ දැක්වෙන PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ,

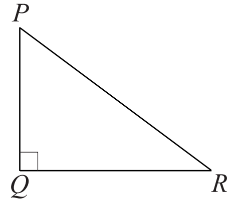
කර්ණය $= PR$

$Q\hat{R}P$ සැලකූ විට, සම්මුඛ පාදය $= PQ$

බද්ධ පාදය $= QR$

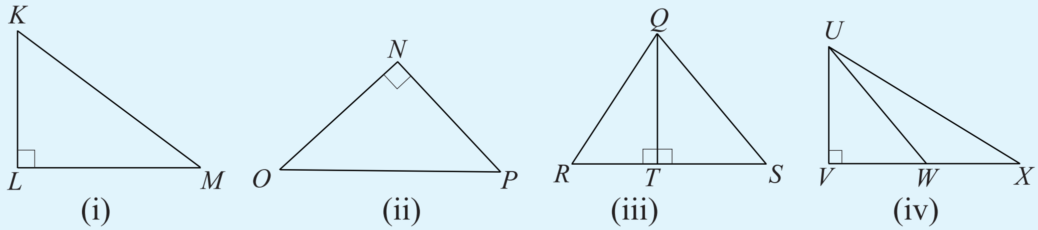
$Q\hat{P}R$ සැලකූ විට සම්මුඛ පාදය $= QR$

බද්ධ පාදය $= PQ$.



18.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන රූප ඇසුරෙන් දී ඇති වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.



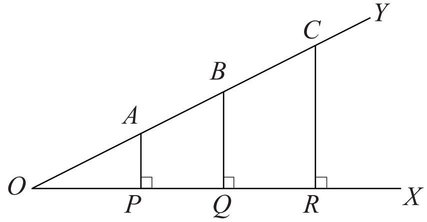
	සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	කර්ණය	සලකා බලන කෝණය	සම්මුඛ පාදය	බද්ධ පාදය
(i)	KLM	KM	$L\hat{K}M$ $L\hat{M}K$		
(ii)	PNO		$N\hat{O}P$ $O\hat{P}N$		
(iii)	QRT QTS		$R\hat{Q}T$ $T\hat{Q}S$		
(iv)	UVX UVW		$V\hat{U}X$ $U\hat{W}V$		

18.2 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කෝණයක් ඇසුරෙන් පාද දෙකක් අතර සම්බන්ධතා පිළිබඳ ව විමසා බැලීමට පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි නිරතවන්න.

ක්‍රියාකාරකම

- XO හා OY බාහු 11 cm පමණ වන සේ 30° ක් වූ $X\hat{O}Y$ අඳින්න.
- OY පාදය ඔස්සේ O සිට 2 cm, 4 cm, 7 cm දුරින් පිළිවෙළින් A, B හා C ලක්ෂ්‍ය ලකුණු කරන්න.
- විහිත චතුරස්‍රය භාවිතයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල සිට, OX රේඛාවට ලම්බ රේඛා ඇඳ ඒවා OX රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් P, Q හා R ලෙස නම් කරන්න.
- එවිට, පහත ආකාරයේ රූපයක් ඔබට ලැබෙනු ඇත.



- එක් එක් සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ පාද මැන පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න. (සියලු මිනුම් හා ගණනය කිරීම් පළමු දශම ස්ථානයට ගන්න)

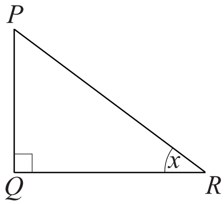
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය	කර්ණය (cm)	30° කෝණය අනුව සම්මුඛ පාදය (cm)	30° කෝණයට අනුව බද්ධ පාදය (cm)	$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$	$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$
AOP	2	1	1.7	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1.7}{2} = 0.9$	$\frac{1}{1.7} = 0.6$
BOQ						
COR						

ක්‍රියාකාරකමෙන් ලබාගත් මිනුම් මත සකස් කළ වගුව අනුව, 30° කෝණය සඳහා සෑම ත්‍රිකෝණයකින්ම $\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ සඳහා 0.5 ක් ද

$\frac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}}$ සඳහා 0.6 ක් ද

$\frac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}}$ සඳහා 0.9 ක් ද ලෙස ලැබී ඇත.

මෙසේ සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණවල එක් එක් පාද අතර අනුපාතවල නියත අගයක් ලැබීමට හේතුව ඒවා සමකෝණික වීම බව ඔබට නිරීක්ෂණය කළ හැකි ය. මෙම අනුපාත සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලෙස හැඳින්වේ. මෙම ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත, ඊට සම්බන්ධ වන පාද අනුව, 30° කෝණය සඳහා සයිනය, 30° කෝණය සඳහා ටැංජනය හා 30° කෝණය සඳහා කෝසයිනය ලෙස නම් කරනු ලැබේ. සයිනය දැක්වීම සඳහා "sin" ද, ටැංජනය දැක්වීම සඳහා "tan" ද, කෝසයිනය දැක්වීම සඳහා "cos" ද යොදනු ලැබේ. ඒ අනුව 30° කෝණයේ සයිනය, "$\sin 30^\circ$" ද, 30°කෝණයේ කෝසයිනය "$\cos 30^\circ$" ද 30° කෝණයේ ටැංජනය "$\tan 30^\circ$" ද වේ.



දැන් රූපයේ දැක්වෙන PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ඉහත දැක්වූ සංකේත ඇසුරෙන් ලියා දක්වමු.

x ඇසුරෙන්;

$$\sin x = \frac{x \text{ හි සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{PQ}{PR}$$

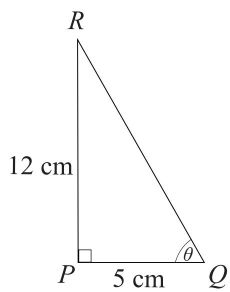
$$\cos x = \frac{x \text{ හි බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{QR}{PR}$$

$$\tan x = \frac{x \text{ හි සම්මුඛ පාදය}}{x \text{ හි බද්ධ පාදය}} = \frac{PQ}{QR}$$

මෙම ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත තුන යොදා ගනිමින් ගණනය කිරීම් සිදු කරන ආකාරය පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

රූපයේ දැක්වෙන PQR ත්‍රිකෝණයේ $\hat{P}$ සෘජුකෝණයකි. $PQ = 5$ cm ද, $PR = 12$ cm ද වේ. $P\hat{Q}R = \theta$ ලෙස දැක්වේ.



(i) QR පාදයේ දිග සොයන්න.
(ii) පහත දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.

(a) $\sin\theta$ **(b)** $\cos\theta$ **(c)** $\tan\theta$

(i) පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව:

$$QR^2 = PQ^2 + PR^2$$
$$= 5^2 + 12^2$$
$$= 25 + 144$$
$$\therefore \quad QR = \sqrt{169}$$
$$= 13$$

$\therefore$ QR පාදයේ දිග 13 cm වේ.

(ii) **(a)** $\sin\theta = \frac{PR}{QR}$ **(b)** $\cos\theta = \frac{PQ}{QR}$ **(c)** $\tan\theta = \frac{PR}{PQ}$

(a) $= \frac{12}{13}$ $= \underline{\underline{0.9230}}$

(b) $= \frac{5}{13}$ $= \underline{\underline{0.3846}}$

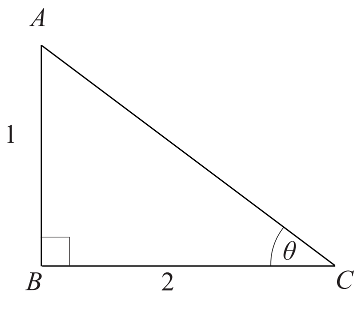
(c) $= \frac{12}{5}$ $= \underline{\underline{2.4}}$

නිදසුන 2

$\tan\theta = \frac{1}{2}$ නම්, $\sin\theta$ හා $\cos\theta$ හි අගය සොයන්න.

$\tan\theta = \frac{1}{2}$ නම් θ හි සම්මුඛ පාදය ඒකක 1ක් ද, θ හි බද්ධ පාදය ඒකක 2ක් ද වේ.

මෙම තොරතුරු රූපයකින් දක්වමු.



එවිට පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව ABC ත්‍රිකෝණයේ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= 1^2 + 2^2$$
$$= 5$$
$$\therefore \quad AC = \sqrt{5}$$

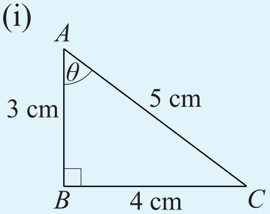
එවිට, $\sin \theta = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{Cos} \theta = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

18.2 අභ්‍යාසය

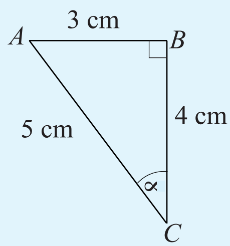
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් රූප සටහනේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන්, එම රූපය යටින් දී ඇති හිස්තැන් සම්පූර්ණ කරන්න.

(i)



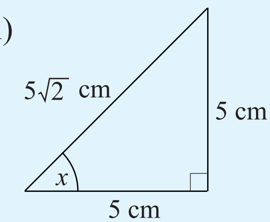
$\sin \theta =$ ....
$\cos \theta =$ ....
$\tan \theta =$ ....

(ii)



$\sin \alpha =$ ....
$\cos \alpha =$ ....
$\tan \alpha =$ ....

(iii)



$\sin x =$ ....
$\cos x =$ ....
$\tan x =$ ....

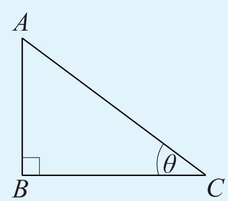
2. $\sin \theta = \dfrac{5}{13}$ නම් (i) $\tan \theta$ (ii) $\cos \theta$ සොයන්න.

3. රූපයේ දැක්වෙන ABC ත්‍රිකෝණයේ $\hat{B}$ සෘජුකෝණයකි. $\hat{C} = \theta$ ලෙස දැක්වූ විට,

(i) $B\hat{A}C$, θ ඇසුරෙන් දක්වන්න.

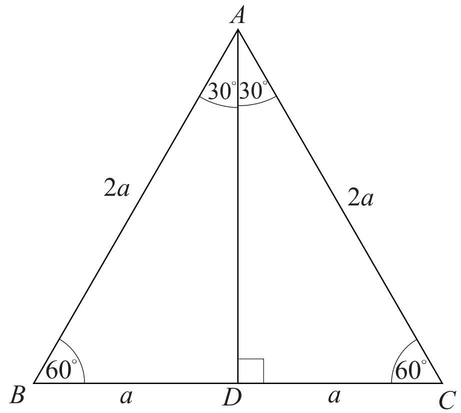
(ii) $\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $\dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ බව පෙන්වන්න.



18.3 විශාලත්ව 30°, 45° හා 60° වන කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත

පාදවල දිග $2a$ බැගින් වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සැලකීමෙන් 60° හා 30° කෝණ සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගත හැකි ය.



රූපයේ දැක්වෙන්නේ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. එහි, ශීර්ෂ කෝණ 60° බැගින් වේ. A ශීර්ෂයේ සිට BC පාදයට AD ලම්බකය ඇඳි විට BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D වන බව ද $B\hat{A}C$ කෝණය සමච්ඡේද වන බව ද අපි දනිමු. එවිට $B\hat{A}D = 30^\circ$ ක් වේ.

ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ AD පාදයේ දිග a ඇසුරෙන් සොයමු. පයිතගරස් ප්‍රමේයය අනුව,

$$
\begin{aligned}
BD^2 + AD^2 &= AB^2 \\
a^2 + AD^2 &= (2a)^2 \\
AD^2 &= 4a^2 - a^2 \\
&= 3a^2 \\
AD &= \sqrt{3}a
\end{aligned}
$$

දැන් ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

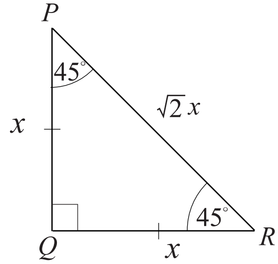
$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

මෙවැනිම ආකාරයකින් 45° කෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ලබා ගැනීමට, PQR සෘජුකෝණික සමද්විපාද ත්‍රිකෝණය යොදා ගනිමු. එහි සෘජුකෝණය අඩංගු පාදවල දිග x ලෙස ගත් විට,

පයිතගරස් සම්බන්ධය අනුව, $PR^2 = x^2 + x^2$

$= 2x^2$

$\therefore \quad PR = \sqrt{2}x$



ඒ අනුව $\sin 45^\circ = \dfrac{PQ}{PR}$

$= \dfrac{x}{\sqrt{2}x}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \dfrac{QR}{PR}$

$= \dfrac{x}{\sqrt{2}x}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = \dfrac{PQ}{QR}$

$= \dfrac{x}{x}$

$= 1$

30°, 45°, 60° කෝණ සඳහා ලබා ගත් අනුපාත, පහත වගුවේ දැක්වේ.

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

නිදසුන 1

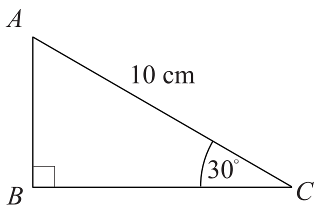
ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, $\hat{B}$ සෘජුකෝණයක් ද, $A\hat{C}B = 30^\circ$ ක් ද, AC පාදය 10 cm ද වේ. AB හා BC පාදවල දිග සොයන්න.

රූපය අනුව, $\sin 30^\circ = \dfrac{AB}{AC}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{AB}{10}$

$AB = 5$

$\therefore$ AB පාදයේ දිග 5 cm වේ.



$$\cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{10}$$

$$\therefore \quad BC = 5\sqrt{3}$$

$\therefore$ BC පාදයේ දිග $5\sqrt{3}$ cm වේ.

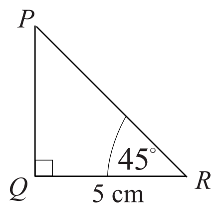
නිදසුන 2

PQR සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයේ දිග සොයන්න.

$$\cos 45^\circ = \frac{QR}{PR}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{PR}$$

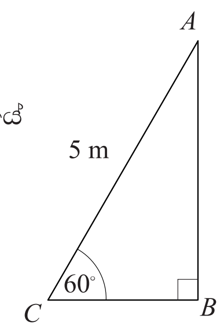
$$\therefore \quad PR = 5\sqrt{2}$$



$\therefore$ කර්ණයේ දිග $5\sqrt{2}$ cm වේ.

නිදසුන 3

දිග 5 m වන ඉණිමඟක් සිරස් බිත්තියකට හේත්තු කර ඇත්තේ, තිරස හා ඉණිමඟ අතර කෝණය 60° ක් වන සේය. ඉණිමගේ ඉහළ කෙළෙවර බිත්තිය ස්පර්ශ කරන්නේ තිරස් බිමේ සිට කොපමණ උසකින් ද?



සිරස් බිත්තිය හා තිරස් පොළොව අතර කෝණය 90° ක් නිසා රූපයේ $A\hat{B}C = 90^\circ$ක් වේ.

ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ,

$$\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{5}$$

$$\therefore AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

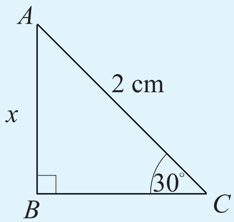
$= 4.325$ ($\sqrt{3} = 1.73$ ලෙස ගැනීමෙන්)

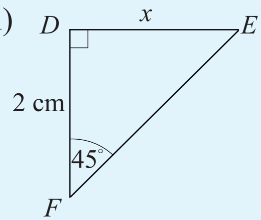
$\therefore$ ඉණිමගේ ඉහළ කෙළවර බිත්තිය ස්පර්ශ කරන්නේ තිරස් බිමේ සිට 4.33 m උසිනි.

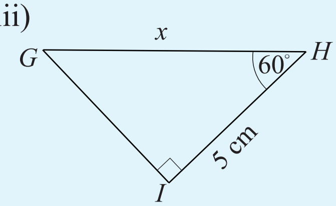
දැන් ඉහත වගුවේ අගය යොදා ගනිමින් පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

18.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණවල දී ඇති දත්ත අනුව, x මගින් දැක්වෙන පාදවල දිග සොයන්න.

(i) 

(ii) 

(iii) 

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ප්‍රකාශනයේ අගය, ඉහත වගුවේ සඳහන් අනුපාත යොදා ගනිමින් සොයන්න.

a. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

b. $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$

c. $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ + \tan 60^\circ$

d. $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ + \tan 60^\circ$

3. පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශන සත්‍යාපනය කරන්න.

(i) $\sin 30^\circ \ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$

(ii) $\cos 30^\circ \ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \ \sin 30^\circ = 0$

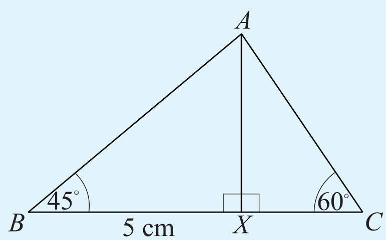
(iii) $\tan 30^\circ = \dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

4. දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව,

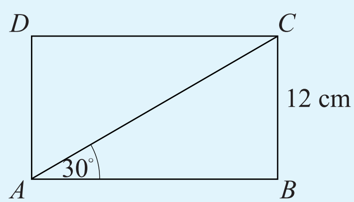
(i) AX දිග

(ii) AC පාදයේ දිග

සොයන්න. ($\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගන්න)



5. $ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රයේ BC පාදය 12 cm වේ නම් විකර්ණයේ දිග සොයන්න.



6. ඇන්ටෙනා කණුවක් සිරස් ව තබා ගැනීම සඳහා එහි මුදුනේ සිට 50 cm ක් පහළින් ගැට ගසන ලද කම්බියක අනික් කෙළවර කණුව පාමුල සිට 5 m ඈතින් තිරස් පොළොවේ පිහිටි කුඤ්ඤයකට තදින් ඇදෙන සේ ගැට ගසා ඇත. කම්බිය හා තිරස් පොළොව අතර කෝණය 30° වේ.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූපයකින් දක්වන්න.

(ii) $\sqrt{3} = 1.7$ ලෙස ගෙන කණුවේ උස සොයන්න.

18.4 ත්‍රිකෝණමිතික වගුව

මෙතෙක් සලකා බලන ලද්දේ 30°, 45° හා 60° කෝණ සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත පමණි. එහෙත් $0^\circ - 90^\circ$ තෙක් වූ අනෙක් කෝණ සඳහා ද මෙවැනි අනුපාත තිබේ. එම කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත වගු ගත කර ඇත. සයින, කෝසයින හා ටැංජන සඳහා වගු තුනක් වෙන වෙන ම සකසා ඇත. වගුවට ඇතුළත් කරන්නේ කෝණ නිසා කෝණයක මිනුම වන අංශකය "කලා" නැමැති තවත් කුඩා කොටස්වලට බෙදා තිබේ. එක් අංශකයක් කලා 60කට සමාන වේ. එනම් $1^\circ = 60'$.

සයින, කෝසයින හා ටැංජන යන ඕනෑම වගුවක පළමුවන තීරුවේ 0° සිට 90° තෙක් වූ කෝණ අගය දැක්වේ. පහත දැක්වෙන්නේ ටැංජන වගුවක කොටසකි.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·0000	0·0029	0·0058	0·0087	0·0116	0·0145	0·0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	·0175	·0204	·0233	·0262	·0291	·0320	·0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	·0349	·0378	·0407	·0437	·0466	·0495	·0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	·0524	·0553	·0582	·0612	·0641	·0670	·0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	·0699	·0729	·0758	·0787	·0816	·0846	·0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26

ඉහළ මුල් තීරයේ අංශක ගණන 0° සිට 90° දක්වා දැක්වෙන අතර (මෙහි දැක්වෙන්නේ වගුවේ කොටසක් නිසා අංශක 0° සිට 4° දක්වා පමණක් දැක්වේ) පළමු පේළියේ, $0'$, $10'$, $20'$ ආදි ලෙසත්, මධ්‍යනය අන්තර $1'$, $2'$, ...$9'$ ආදි ලෙසත් වශයෙන් එක් අංශයක කොටස් වූ කලා අගයන් දක්වා ඇත. කිසියම් කෝණයක් සඳහා අනුපාතය ලබා ගැනීම සඳහා ලඝුගණක වගුවේ ආකාරයටම පේළි අංකය හා තීර අංකය ඔස්සේ වූ අගය හා මධ්‍යන්‍ය අන්තර තීරුවේ අගය සම්බන්ධ කර ගනු ලැබේ.

දැන්, ඉහත සඳහන් කළ ත්‍රිකෝණමිතික වගු වෙන වෙන ම සලකා බලමු.

ටැංජන වගුව

මෙම වගුවේ අනුපාත 0.0000න් ආරම්භ වී ක්‍රමයෙන් වැඩිවෙමින් 1.0000ත් ඉක්මවා යමින් අංශක 90° තෙක් පැමිණීමේ දී ඉතා විශාල අගයන් ගනියි. පහත දැක්වෙන ටැංජන වගුවෙන් ලබාගත් තවත් කොටසකි.

මුලින් ම tan 43° හි අගය සොයමු. tan 43° ට අදාල අගය ලබා ගැනීමට 43° අඩංගු පේළිය ඔස්සේ 0′ තීරයේ ඇති අගය ගන්න. එය 0.9325 වේ.
∴ tan 43° = 0.9325 වේ.

දැන් වගුව භාවිතයෙන් tan 48° 20′ හි අගය සොයමු.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்கன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
45	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40	7	14	21	28	34	41	48	55	62

වගුව භාවිතයෙන් ඒ සඳහා 48° අඩංගු පේළිය ඔස්සේ 20′ ඇති තීරය දක්වා යා යුතු ය. එහි ඇති .1237 ගන්න. තව ද එම 20′ අඩංගු තීරයේ ඉහළින් ඇති සංඛ්‍යාව වන 1.0117 හි පූර්ණ කොටස ලෙස 1 ඇති නිසා එම තීරයේ සියලු සංඛ්‍යා සඳහා එම පූර්ණ කොටස ගත යුතු ය. (එසේ මුල් පේළියේ පමණක් පූර්ණ කොටස යොදන්නේ වගුවේ පැහැදිලි බව සඳහා ය.) ඒ අනුව tan 48° 20′ හි අගය 1. 1237 වේ.

ඒ ආකාරයටම tan 49° 57′ හි අගය සොයමු. මුලින් ම 49° 50′ හි ටැංජන අගය සෙවිය යුතු ය.
එය,

tan 49° 50′ = 1.1847 ලෙස ලැබේ.

57′ වීමට මධ්‍ය අන්තර කොටසින් 7′ ද ගත යුතු ය. ඒ අනුව 7′ ට අදාළ මධ්‍යන්‍ය අන්තරය වන 0.0048 (සම්මතයක් ලෙස මෙහි දී මධ්‍යන්‍ය අන්තරය දශමස්ථාන 4ක අගයක් ලෙස සලකා එහි නිෂ්ශූන්‍ය කොටස පමණක් දක්වනු ලැබේ) යන අගය 1.1847 ට එකතු කළ යුතු ය. එවිට,

tan 49° 57′ = 1.1847 + 0.0048
= 1.1895 ලෙස ලැබේ.

නිදසුන 1

(i) tan 34° 30′ = 0.6873

(ii) tan 44° 42′ = 0.9884 + 0.0011
= 0.9895

(iii) tan 79° 25′ = 5.309 + 0.044
= 5.353

ලඝුගණක වගුවේ ප්‍රතිලඝුගණකය ලබා ගන්නා ආකාරයටම කිසියම් කෝණයක් සඳහා වූ අනුපාතයකින් අනුරූප කෝණය ලබා ගැනීම ද සිදු කෙරේ.

$\tan \theta = 1.1054$ පරිදි වන θ කෝණය ලබා ගනිමු.

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·0000	1·0058	1·0117	1·0176	1·0235	1·0295	1·0355	44	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	·0355	·0416	·0477	·0538	·0599	·0661	·0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	·0724	·0786	·0850	·0913	·0977	·1041	·1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	·1106	·1171	·1237	·1303	·1369	·1436	·1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	·1504	·1571	·1640	·1708	·1778	·1847	·1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62

1.1054ට ආසන්න ම ඊට අඩු අගය වන 1.1041 වගුවෙන් ලබා ගන්න. ඊට අනුරූප කෝණය $47^\circ\ 50'$ බව පෙනේ. 1.1054 ලැබීමට 1.1041ට තවත් 0.0013ක් එකතු විය යුතු ය. එමනිසා 0.0013 (එනම්, මධ්‍යන්‍ය අන්තර කොටසේ 13 ලෙස ඇති අගයට) අනුරූප කලා ගණන මෙම අංශක ගණනට එකතු කළ යුතු ය. එම අගය කලා 2කි. එමනිසා, ටැංජනය 1.1054 වන කෝණය වන්නේ $47^\circ\ 50' + 2' = 47^\circ\ 52'$ එමනිසා, $\theta = 47^\circ\ 52'$.

නිදසුන 2

(i) $\tan \theta = 0.3706$ නම්
$\theta = 20^\circ\ 20'$

(ii) $\tan \theta = 0.4774$ නම්
$\theta = 25^\circ\ 30' + 1'$
$= 25^\circ\ 31'$

(iii) $\tan \theta = 0.8446$ නම්
$\theta = 40^\circ\ 11'$

සයින වගුව

මෙම වගුවෙහි 0.0000 සිට 1.0000 තෙක් අගයන් පවතී. ටැංජන් වගුවේ මෙන්ම, මෙහි දී ද පළමුවන තීරයෙහි කෝණයේ අගය 0° සිට 90° තෙක් ලබා දේ. ඉහළින් පවතින මුල් පේළියෙහි $0'$, $10'$, $20'$ ආදි ලෙසත්, මධ්‍යන්‍ය අන්තර කොටසේ, නැවත $1'$, $2'$, $3'$ ආදි ලෙසත් කෝණයේ කලා අගයන් දැක්වේ. ටැංජන් වගුව භාවිත කළ ආකාරයට ම මෙම වගුව ද භාවිත කරනු ලැබේ.

සටහන: ටැංජන වගුවේ අගයන් 0 සිට ඉතා විශාල අගයන් දක්වා විහිදුන ද සයින වගුවේ ඇත්තේ 0 සිට 1 දක්වා අගයන් පමණි. එයට හේතුව ත්‍රිකෝණයක කෝණයක සයින අගය සැමවිටම 0 ත් 1ත් අතර පිහිටන නිසා ය.

sin 33° 27′ හි අගය වගුවෙන් ලබා ගනිමු.

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
30°	0·5000	0·5025	0·5050	0·5075	0·5100	0·5125	0·5150	59	2	5	8	10	13	15	18	20	23
31	·5150	·5175	·5200	·5225	·5250	·5275	·5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	·5299	·5324	·5348	·5373	·5398	·5422	·5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	·5446	·5471	·5495	·5519	·5544	·5568	·5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	·5592	·5616	·5640	·5664	·5688	·5712	·5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22

මුලින් ම, $\sin 33^\circ 20' = 0.5495$ ලෙස සටහන් කරගෙන, ඉතිරි $7'$ ලබා ගැනීම සඳහා 33° පේළියේම මධ්‍යන්‍ය අන්තරවල $7'$ ට අනුරූප අගය වන 0.0017 එයට එකතු කරන්න. එවිට, $\sin 33^\circ 27' = 0.5495 + 0.0017 = 0.5512$ වේ.

නිදසුන 3

(i) $\sin 75^\circ 44' = 0.9689 + 0.0003$
$= 0.9692$

(ii) $\sin 45^\circ 34' = 0.7133 + 0.0008$
$= 0.7141$

(iii) $\sin 39^\circ 50' = 0.6406$

දැන්, යම් සයින අගයක් සඳහා ගැලපෙන කෝණය ලබා ගැනීමට වගුව යොදා ගනිමු. එය ද ටැංජන වගුව යොදා ගත් ආකාරයට ම වේ.

$\sin \theta = 0.5075$ වන θ කෝණය මුලින් ම සොයමු. මෙම අගය වගුවේ 30° පේළියේ $30'$ තීරුවේ ඇත.
ඒ අනුව $\sin \theta = 30^\circ 30'$ වේ.

දැන් තවත් කෝණයක අගය වගුව ඇසුරෙන් සොයමු.

$\sin \theta = 0.5277$ වන θ කෝණය සෙවීමට, 0.5277 නොමැති බැවින් ඊට ආසන්නම කුඩා අගය ලෙස වගුවේ ඇති 0.5275 සලකන්න. එයට අනුරූප කෝණය වන්නේ $31^\circ 50'$ ය. ඉතිරි 0.0002ට අනුරූප වන කලා අගය සෙවීමට එම පේළියේ ම ඇති මධ්‍යන්‍ය අන්තර කොටස දෙස බලන්න. එහි 2 යන අගයට අනුරූප වන්නේ කලා 1 කි. එමනිසා, සයින අගය 0.5277 නම් වන කෝණය වන්නේ $31^\circ 51'$ ය.
එනම් $\sin \theta = 0.5277$ නම් $\theta = 31^\circ 51'$ වේ.

නිදසුන 4

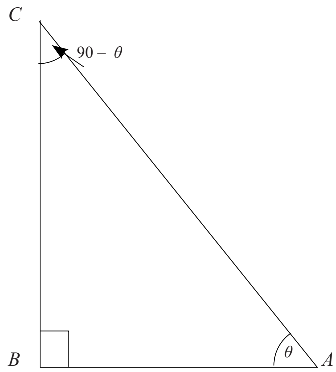
(i) $\sin \theta = 0.5831$ නම්
$\theta = 35^\circ 40'$

(ii) $\sin \theta = 0.7036$ නම්
$\theta = 44^\circ 43'$

(iii) $\sin \theta = 0.9691$ නම්
$\theta = 75^\circ 43'$

කෝසයින

පහත දැක්වෙන ත්‍රිකෝණය සලකන්න.



එය, $A\hat{B}C = 90^\circ$ වන සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයකි. මෙම ත්‍රිකෝණයේ $B\hat{A}C = \theta$ ලෙස ගනිමු. එවිට, ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල එකතුව 180° නිසා $A\hat{C}B = 90^\circ - \theta$ වේ.

$A\hat{C}B$ හා $B\hat{A}C$ කෝණවල එකතුව අංශක 90° කි. එවැනි කෝණ යුගලක් අනුපූරක කෝණ යුගලක් ලෙස හැඳින්වූ බව ඔබ මීට ඉහත ශ්‍රේණිවල දී උගෙන ඇත.

මෙම ABC ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\cos\theta = \frac{\hat{A} \text{ හි බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{AB}{AC} \text{ වේ.}$$

එසේ ම,

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{\hat{C} \text{ හි සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \frac{AB}{AC} \text{ වේ.}$$

මේ අනුව, $\cos\theta = \sin(90 - \theta)$ ලෙස අපට ලැබේ.

මෙම සම්බන්ධය භාවිතයෙන්, ත්‍රිකෝණයක කෝණයක කෝසයිනය, සයින ඇසුරෙන් ගණනය කළ හැකි ය.

නිදසුන 1

$\cos 58^\circ$ හි අගය සොයන්න.

$\cos 58^\circ = \sin(90^\circ - 58^\circ)$ (ඉහත ලබාගත් සම්බන්ධය අනුව)

$= \sin 32^\circ$

$= \underline{\underline{0.5299}}$ (ඉහත කොටසේ දී ඇති වගුව අනුව)

නිදසුන 2

cos $56^\circ\ 18'$ හි අගය සොයන්න.

මුලින් ම $90 - 56^\circ\ 18'$ හි අගය සොයමු. එය $33^\circ\ 42'$ කි. එමනිසා,

$$\begin{aligned}\cos 56^\circ\ 18' &= \sin (90^\circ - 56^\circ\ 18')\\ &= \sin 33^\circ\ 42'\\ &= \underline{\underline{0.5549}}\end{aligned}$$

මේ අයුරින් ම, කෝසයිනය දී ඇති විට අදාළ කෝණය ද සෙවිය හැකි ය. ඒ සඳහා නිදසුනක් සලකා බලමු.

නිදසුන 3

$\cos \theta = 0.5175$ නම් θ හි අගය සොයන්න.

මෙය, $\sin (90 - \theta) = 0.5175$ ලෙස ලියමු. ඉන්පසු, සයින අගය 0.5175 වන කෝණය සොයමු. වගුව අනුව එය $31^\circ\ 10'$ වේ. එමනිසා,

$90 - \theta = 31^\circ\ 10'$ ලෙස ලිවිය හැකි ය.

මෙම සමීකරණය θ සඳහා විසඳීමෙන් θ හි අගය සෙවිය හැකි ය. එවිට,

$$\theta = 90 - 31^\circ\ 10' = 58^\circ\ 50'$$ ලෙස θ හි අගය ලැබේ.

සටහන: ත්‍රිකෝණයක කෝණයක කෝසයිනය ද සැමවිටම, සයිනය මෙන්, 0ත් 1ත් අතර අගයක් වේ. ඉහත නිදසුන්වල දැක්වූ ආකාරයට (සයින ඇසුරෙන් කෝසයින ලබා ගැනීමට) අමතර ව, සයින වගුව ඇසුරෙන් ද කෝණයක කෝසයිනය සෙවිය හැකි ය. සයින වගුවේ, මධ්‍යන්‍ය අන්තරවලට කලින් තීරයේ දැක්වෙන්නේ වගුවේ මුල් ම තීරයේ ඇති කෝණ අංශක 90න් අඩුකර ලැබෙන කෝණ බව නිරීක්ෂණය කරන්න. එම අගයන් භාවිතයෙන් ද වගුව ඇසුරෙන් කෝසයින සෙවිය හැකි ය. නමුත්, මධ්‍යන්‍ය අන්තර ගණනය කිරීමේ දී අදාළ අගයන් අඩු කළ යුතු ය.

කෝසයින වගුව භාවිතයෙන් කෝණ සොයා ගන්නා අයුරු දැන් විමසා බලමු.

වගුව ඇසුරෙන් cos $4^\circ\ 20'$ හි අගය සොයමු.

80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	(අන්තරය ඉතා කුඩා බැවින් වගු ගත කිරීම අනවශ්‍යය.)								
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

නිදසුන 4

දකුණු පස "අංශක" තීරුවෙන් 4° හා පහළ කලා තීරුවෙන් $20'$ ගත යුතු ය. 4° කෝණයට අදාළ පේළියේ ඊට වම් පසින් වූ $20'$ ගත්විට $\cos 4^{\circ}\ 20' = 0.9971$ වේ.

නිදසුන 5

දැන් $\cos 9^{\circ}\ 26'$ හි අගය සොයමු.

එවිට $\cos 9^{\circ}\ 20' = 0.9868$ එම පේළියේ ම මධ්‍යන්‍ය අන්තර තීරුවල $6'$ ට අනුරූප අගය 0.0003 වේ.

දැන් කෝසයින් අගය ලබා ගැනීමේ දී මධ්‍ය අන්තර තීරුවල අගය අඩු කළ යුතු ය.

ඒ අනුව

$$\cos 9^{\circ}\ 26' = 0.9868 - 0.0003$$
$$= \underline{\underline{0.9865}}$$

නිදසුන 6

$\cos \theta = 0.4374$ වූ කෝණය සොයමු.

25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
	60'	50'	40'	30'	20'	10'	0'		1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

වගුවේ 0.4374 ට අඩු ආසන්න අගය 0.4358 වේ. එය $64^{\circ}\ 10'$ වේ.

0.4374 වීමට අඩු 0.0016 පිහිටන්නේ මධ්‍යයන්‍ය අන්තර $6'$ හි ය. එම කලා ගණන අඩු කළ විට,

$$64^{\circ}\ 10' - 6' = 64^{\circ}\ 4'$$
$$\therefore\ \cos \theta = 0.4374 \text{ වන } \theta \text{ කෝණය } = \underline{\underline{64^{\circ}\ 4'}}$$

18.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය ටැංජන වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.

a. $\tan 25^\circ$ **b.** $\tan 37^\circ$ **c.** $\tan 40^\circ\ 54'$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ටැංජන අගයට අදාළ θ කෝණය සොයන්න.

a. $\tan \theta = 0.3214$ **b.** $\tan \theta = 0.7513$ **c.** $\tan \theta = 0.9432$

3. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය සයින් වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න.

a. $\sin 10^\circ\ 30'$ **b.** $\sin 21^\circ\ 32'$ **c.** $\sin 25^\circ\ 57'$

4. පහත දැක්වෙන එක් එක් සයින අගයට අදාළ θ කෝණය සොයන්න.

a. $\sin \theta = 0.5000$ **b.** $\sin \theta = 0.4348$ **c.** $\sin \theta = 0.6437$

5. පහත දැක්වෙන එක් එක් අගය කෝසයින වගුව භාවිතයෙන් සොයන්න. පිළිතුරුවල නිවැරදිතාව සයින් වගුව භාවිතයෙන් පරීක්ෂා කරන්න.

a. $\cos 5^\circ\ 40'$ **b.** $\cos 29^\circ\ 30'$ **c.** $\cos 44^\circ\ 10'$

6. පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝසයින අගයට ගැලපෙන θ කෝණය සොයන්න.

a. $\cos \theta = 0.4358$ **b.** $\cos \theta = 0.6450$ **c.** $\cos \theta = 0.9974$

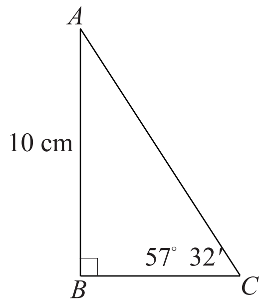
18.5 ත්‍රිකෝණමිතික වගු භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

මීට පෙර 30°, 45° හා 60° කෝණ සඳහා පමණක් විසඳූ ගැටලු, දැන් $0^\circ - 90^\circ$ තුළ වූ ඕනෑම කෝණයක් ඇතුළත් වුවද විසඳිය හැකි ය. ත්‍රිකෝණමිතිය ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමේ දී පහත දැක්වෙන කරුණු සැලකිල්ලට ගැනීම වැදගත් ය.

1. සුදුසු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් සැලකීම
2. එම ත්‍රිකෝණයෙහි සුදුසු කෝණයක් තෝරා ගැනීම
3. එම කෝණය සඳහා සුදුසු ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් යොදා ගැනීම

මේ සඳහා නිදසුන් කිහිපයක් විමසා බලමු.

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ දී ඇති මිනුම් අනුව, AC පාදයේ දිග සොයන්න.

ත්‍රිකෝණයේ දී ඇති කෝණය C ය. ඊට සම්මුඛ පාදයේ දිග දී ඇති අතර කර්ණයේ දිග සෙවිය යුතු ය. එමනිසා, සම්මුඛ පාදය හා කර්ණය සම්බන්ධ කෙරෙන සයින අනුපාතය යොදා ගත යුතු ය.

$$\sin 57^\circ\ 32' = \frac{AB}{AC}$$

$$0.8437 = \frac{10}{AC}$$

$$\therefore \quad AC = \frac{10}{0.8437}$$

ලඝුගණක ඇසුරෙන් මෙම බෙදීම කරමු.

$$AC = \frac{10}{0.8437}$$ ලෙස ගනිමු.

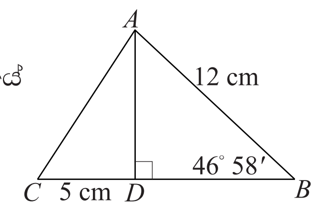
එවිට, $$\lg AC = \lg \frac{10}{0.8437}$$

$$= \lg 10 - \lg 0.8437$$
$$= 1 - \bar{1}.9262$$
$$= 1.0738$$
$$\therefore AC = \text{antilog } 1.0738$$
$$\therefore AC = 11.85$$

එමනිසා, AC දිග (දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදි ව) 11.85 cm වේ.

නිදසුන 2

ABC ත්‍රිකෝණයේ, BC පාදයට ලම්බව AD ඇඳ ඇත. රූපයේ දී ඇති තොරතුරු අනුව, $A\hat{C}B$ හි අගය සොයන්න.



මෙහි, ACB කෝණය සෙවීම සඳහා සැලකිය යුතු සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය වන්නේ ADC ය. එම ත්‍රිකෝණයේ පාද දෙකක දිග දන්නේ නම් $A\hat{C}B$ කෝණය සෙවිය හැකි ය. එහි එක් පාදයක දිග වන CD, 5 cm ලෙස දී ඇත. තවත් පාදයක දිග සොයා ගත යුතු ය. ඒ සඳහා ADB ත්‍රිකෝණය සලකා AD සෙවිය හැකි ය. එමනිසා, ADB ත්‍රිකෝණය සලකා, සයින, අනුපාතය යොදා AD දිග මුලින් ම සොයමු.

$$\sin\ 46^\circ\ 58' = \frac{AD}{AB}$$
$$0.7310 = \frac{AD}{12}$$

$$12 \times 0.7310 = AD$$
$$\therefore \quad AD = 8.7720 \text{ cm}$$

දැන්, ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, $\tan A\hat{C}D = \dfrac{AD}{CD}$

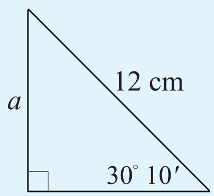
$$= \frac{8.7720}{5}$$

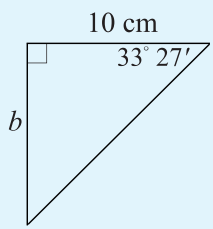
$$\therefore \quad \tan A\hat{C}D = 1.7544$$

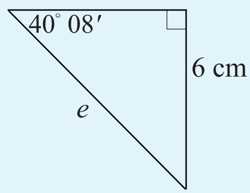
$$\therefore \quad \underline{\underline{A\hat{C}D = 60^\circ\, 18'}}$$

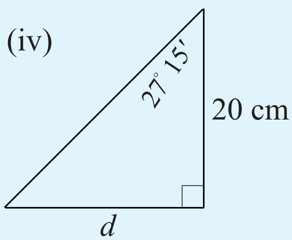
18.5 අභ්‍යාසය

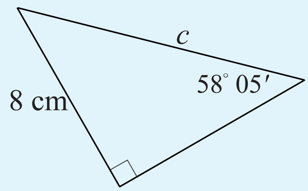
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ, වීජීය සංකේතයෙන් දක්වා ඇති පාදවල දිග සොයන්න.

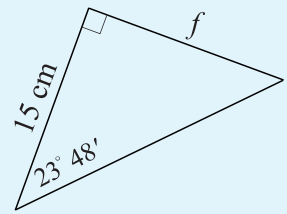
(i)


(ii)


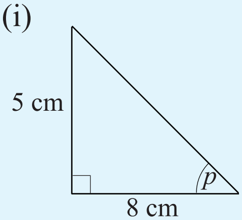
(iii)


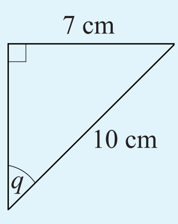
(iv)


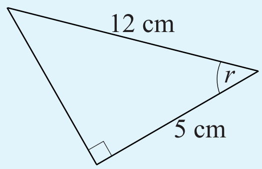
(v)


(vi)


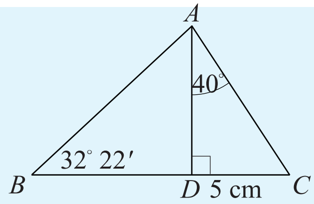
2. පහත දැක්වෙන එක් එක් ත්‍රිකෝණයේ, වීජීය සංකේතයෙන් දක්වා ඇති කෝණයේ අගය සොයන්න.

(i)


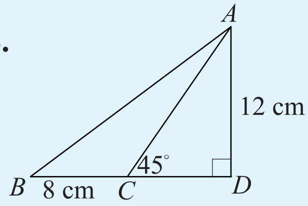
(ii)


(iii)


3. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත ABC ත්‍රිකෝණයේ
(i) පරිමිතිය
(ii) වර්ගඵලය
සොයන්න.

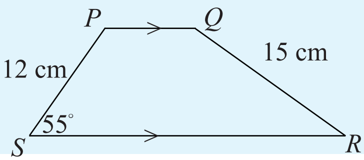


4.



රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු මත ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$ හි අගය $30^\circ\ 58'$ ක් බව පෙන්වන්න.

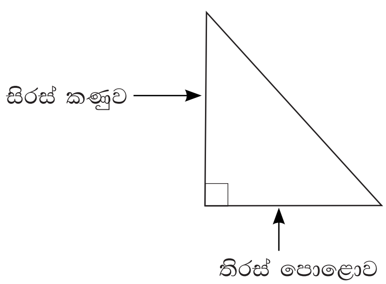
5.



$PQRS$ ත්‍රපීසියමේ $SR > PQ$ වේ. $PS = 12$ cm හා $QR = 15$ cm නම් $Q\hat{R}S$ හි අගය සොයන්න.

18.6 සිරස් තලයේ කෝණ

පොළොවට සමාන්තර වූ තලය තිරස් තලයකි. තිරසට ලම්බ වූ තලය සිරස් තලයකි. පොළොවට ලම්බව සිටුවා ඇති කණුවක් සිරස් කණුවකි. එවැනි පිහිටීමක් රූපයේ දැක්වේ.



ආරෝහණ හා අවරෝහණ කෝණ ඇතුළත් පරිමාණ රූප ඇසුරෙන් වස්තුවක පිහිටීම සෙවීමට ඔබ 10 ශ්‍රේණියේ දී උගෙන ඇත. දැන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත ඇසුරෙන් වස්තුවල පිහිටීම සෙවීම පිළිබඳ ව ඉගෙන ගනිමු.

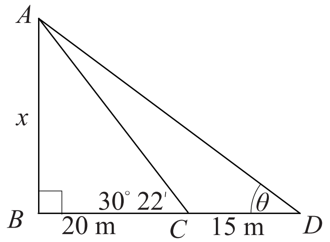
ඒ සඳහා පහත නිදසුන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

AB සිරස් කුළුනක පාමුල සිට සම බිමේ මීටර 20ක් දුරින් වූ C ලක්ෂ්‍යයේ සිටින්නෙක්ට, කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය $30^\circ\ 22'$කි. ඔහු කණුවෙන් විරුද්ධ දිශාවට සරල රේඛීය මාර්ගයක් ඔස්සේ, මීටර 15ක් ගොස් නැවත කුළුන මුදුන නිරීක්ෂණය කරයි.

(i) මෙම තොරතුරු දළ සටහනක දක්වන්න.
(ii) කුළුනේ උස ආසන්න මීටරයට සොයන්න.
(iii) දෙවන නිරීක්ෂණ අවස්ථාවේ කුළුන මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

(i)



(ii) කුළුනේ උස මීටර x යයි ගනිමු.

එවිට, ABC ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකූ විට,

$$\tan 30^\circ\ 22' = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ\ 22' = \frac{x}{20}$$

$$\begin{aligned} x &= 20 \tan 30^\circ\ 22' \\ &= 20 \times 0.5859 \\ &= 11.718 \end{aligned}$$

$\therefore$ කුළුනේ උස 12 m පමණ වේ.

(iii) D හි දී, කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණ θ ලෙස ගනිමු.
එවිට; ABD ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්,

$$\tan \theta = \frac{AB}{BD}$$

$$\tan \theta = \frac{12}{35}$$

$$\tan \theta = 0.3428$$

$$\therefore \quad \theta = 18^\circ\ 55'$$

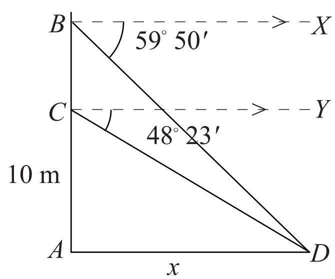
$\therefore$ දෙවන නිරීක්ෂණයේ දී කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය $18^\circ\ 55'$ වේ.

නිදසුන 2

මහල් කිහිපයකින් යුතු සිරස් ගොඩනැගිල්ලක පොළොව මට්ටමේ සිට මීටර 10ක් වූ උසකින් පිහිටි කුඩා කවුළුවකින් පිටත බලන්නෙකුට, ගොඩනැගිල්ල පිහිටි බිමේ, ඈත නවතා තිබෙන යතුරු පැදියක් පෙනෙන අවරෝහණ කෝණය $48^\circ\ 23'$කි. ඒ මොහොතේම ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම මාලයට ගොස් එහි පිහිටි තවත් කුඩා කවුළුවකින් නැවත වරක් පෙර දී නිරීක්ෂණය කළ යතුරු පැදිය නිරීක්ෂණය කළ විට අවරෝහණ කෝණය $59^\circ\ 50'$ ක් විය.

(i) මෙම තොරතුරු දළ සටහනක දක්වන්න.
(ii) ගොඩනැගිල්ලේ සිට කොපමණ දුරකින් යතුරුපැදිය නතර කර තිබේ ද?
(iii) ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම මාලයේ කවුළුව තෙක් උස මීටරවලින් දශමස්ථාන දෙකකට ආසන්නව ගණනය කරන්න.

(i)



(ii) රූපයේ ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් වේ. ගොඩනැගිල්ලේ සිට යතුරුපැදිය තෙක් ඇති දුර මීටර x යැයි ගනිමු.

$Y\hat{C}D = 48^\circ\ 23'$ නිසා $A\hat{D}C = 48^\circ\ 23'$ (ඒකාන්තර කෝණ)

එවිට, ADC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන්,

$$\tan 48^\circ\ 23' = \frac{AC}{AD}$$

$$\tan 48^\circ\ 23' = \frac{10}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{10}{\tan 48^\circ\ 23'} = x$$

එනම්, $x = \dfrac{10}{1.1257}$

$= 8.883$

x හි අගය ලඝුගණක වගු මගින් ලබා ගැනීම
$\lg x = \lg 10 - \lg 1.1257$
$= 1 - 0.0515$
$\therefore x = \text{antilog } 0.9485$
$= 8.883$

$\therefore$ ගොඩනැගිල්ලේ සිට යතුරුපැදියට ඇති දුර මීටර 8.883 m වේ.

(iii) ABD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයේ, $A\hat{D}B = 59^{\circ}\ 50'$

$$\tan 59^{\circ}\ 50' = \frac{AB}{AD}$$

$$\tan 59^{\circ}\ 50' = \frac{AB}{8.883}$$

$$AB = 8.883 \times 1.7205$$

$$= 15.28$$

$\therefore$ ගොඩනැගිල්ලේ ඉහළම මාලයේ කවුළුව තෙක් උස 15.28 m පමණ වේ.

ඉහත නිදසුන් අනුව පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

18.6 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් දළ රූප සටහන් අඳින්න.

(i) AB සිරස් කුළුනක මුදුන A වේ. කුළුනේ පාමුල සිට සම බිමේ මීටර 20ක් ඈතින් සිටින නිරීක්ෂකයෙකුට කුළුන මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය $55^{\circ}\ 20'$ කි. නිරීක්ෂකයාගේ උස 1.5 m වේ.

(ii) මීටර 35ක් උස දුරකථන සම්ප්‍රේෂණ කුළුණක මුදුනේ සිට එහි අලුත්වැඩියාවක යෙදෙන කාර්මිකයෙක්, කුළුණ පිහිටි බිමේ, ඈත නතර කර තිබෙන වාහනයක් පෙනෙන, අවරෝහණ කෝණය 50°කි.

(iii) සිරස් ගොඩනැගිල්ලක දෙවන මහලේ සිටින්නෙක්, මීටර 75ක් දුරින් වූ ප්‍රදීපස්ථම්භයක මුදුන $27^{\circ}\ 35'$ ක ආරෝහණ කෝණයකින් ද, එහි පාමුල පෙනෙන අවරෝහණ කෝණය $41^{\circ}\ 15'$ කි.

(iv) ළමයෙක්, සිරස් විදුලි සම්ප්‍රේෂණ කුළුනක මුදුන 30° ආරෝහණ කෝණයකින් දකියි. 25 m ක් කුළුන දෙසට ලංවී නැවත කුළුන දෙස බැලූ විට එහි මුදුන පෙනෙන්නේ 50°ක ආරෝහණ කෝණයකිනි (ළමයාගේ උස නොසළකා හරින්න).

2. 20 m උස ප්‍රදීපස්ථම්භයක මුදුනේ වූ ජනේලයකින්, පිටත බලන ආරක්ෂක නිලධාරියෙක් මුහුදේ යාත්‍රා කරන නැවක් $30^{\circ}\ 15'$ක අවරෝහණ කෝණයකින් තිබෙන බව නිරීක්ෂණය කරයි. නැවට ප්‍රදීපස්ථම්භයේ සිට ඇති දුර ගණනය කරන්න.

3. සිරස් කුළුනක පාමුල සිට සම මට්ටමේ මීටර 20ක් ඈතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කුළුන මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $35^{\circ}\ 12'$ක් විය. කුළුන සිරස් ව රඳවා ගැනීමට කුළුන පාමුල සිට මීටර 20ක් දුරින් සම බිමේ සවිකර ඇති කුඤ්ඤයක සිට කම්බියක්, හොඳින් ඇදෙන සේ කුළුන මුදුනට ගැට ගැසීමට අවශ්‍ය ය. ඒ සඳහා අවශ්‍ය කම්බියේ දිග සොයන්න. (නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසළකා හරින්න, ගැට ගැසීම සඳහා කම්බියේ මීටර භාගයක දිගක් අවශ්‍ය බව සලකන්න)

4. සිරස් විදුලි කම්බි කණුවක පාමුල පිහිටි සම බිමෙහි ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට කණුව මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 50° කි. කණුවේ උස මීටර 12ක් නම්, කණුව පාමුල සිට නිරීක්ෂණ ලක්ෂ්‍යයට ඇති දුර සොයන්න. (නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසළකා හරින්න)

5. තිරස් පොළොව මත A හා B සිරස් කුළුනු දෙකක මීටර් 200ක පරතරයකින් පිහිටා තිබේ. A කුළුන මුදුනේ සිට, B හි මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $4^{\circ}\ 10'$ක් ද, B හි පාමුල අවරෝහණ කෝණය $8^{\circ}\ 15'$ක් ද බව පෙණුනි.

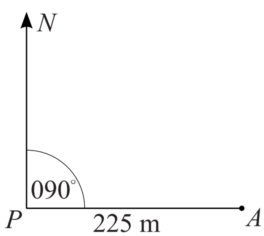
(i) මෙම තොරතුරු දළ රූපයකින් දක්වන්න.
(ii) A හා B කුළුනුවල උස වෙන වෙන ම ආසන්න මීටරයට සොයන්න.
(iii) A කුළුන පාමුල සිට, B කුළුන මුදුනෙහි ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

6. එකිනෙකට මීටර 20 දුරින් පිහිටි සිරස් කණු දෙකක් අතර හරිමැද සිටින්නෙකුට එක් කණුවක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 60° ක් බව ද, අනෙක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය 30° ක් බව ද පෙනුනි. (නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසලකා හරින්න).
(i) කණු දෙකේ උස වෙන වෙනම සොයන්න.
(ii) එක් කණුවක මුදුනේ ගැට ගසන ලද කම්බියක් අනෙක් කණුවේ මුදුනේ හොඳින් ඇදෙන සේ ගැට ගසා ඇත. ගැටවලට යොදා ගත් කොටස නොසළකා හැර එම කම්බියේ දිග සොයන්න

18.7 තිරස් තලයේ කෝණ

තිරස් තලය මත පිහිටීම්වල දිශාව දැක්වීම සඳහා දිගංශය යොදා ගන්නා බව මීට කලින් ඔබ උගෙන ඇත. දිගංශය යනු, උතුරු දිශාවෙන් ආරම්භ වී, දක්ෂිණාවර්තව මැනීම සිදු කෙරෙන කෝණ මිනුමකි. එය දැක්වීම සඳහා අංක තුනක් යොදා ගැනීම සාමාන්‍ය ක්‍රමයයි. නූතන බිම් මැනුම් උපකරණවල දිගංශය සමඟ දුර ද සටහන් වේ.

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට බලන විට නැගෙනහිර දිශාවෙන් පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ දිගංශය 090° ක් ද දුර මීටර 225ක් ද වේ. එම විස්තරය මෙසේ රූපසටහනක දැක්විය හැකි ය.



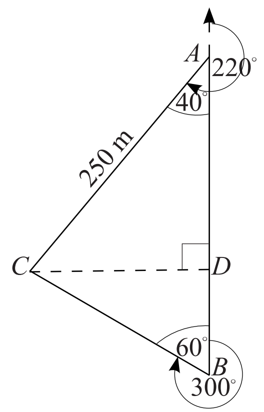
දිගංශය සහිත රූපසටහන්වල ගණනය කිරීම් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත යොදා ගනිමින්, සිදුකරන ආකාරය නිදසුනකින් සලකා බලමු.

නිදසුන 1

උතුරු දකුණු දිශාව ඔස්සේ වැටී ඇති සෘජු මාර්ගයක A නම් ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට, මාර්ගයෙන් පිටත පිහිටි C නම් ලක්ෂ්‍යයක වූ සෘජු කුළුනක පාමුල 220° ක දිගංශයකින් හා මීටර 250ක දුරින් පෙනුනි. සෘජු මාර්ගයේ ම පිහිටි B නම් වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක සිට බලන විට C පෙනුනේ 300° ක දිගංශයකිනි.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූපයකින් දක්වන්න.
(ii) කුළුණ පාමුල සිට AB මාර්ගයට ඇති දුර සොයන්න.
(iii) AB දුර සොයන්න.

(i)



(ii) A හි සිට C පෙනෙන දිගංශය 220° නිසා $D\hat{A}C = 220^\circ - 180^\circ$
$= 40^\circ$

එවිට, ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $\sin 40^\circ = \frac{CD}{AC}$

$$AC \sin 40^\circ = CD$$
$$CD = 250 \sin 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.6428$$
$$= 160.7000$$

$\therefore$ C සිට AB මාර්ගයට ඇති කෙටිම දුර 160.7 m

(iii) AB දුර $= AD + DB$

ACD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $\cos 40^\circ = \frac{AD}{AC}$

$$AD = AC \cos 40^\circ$$
$$= 250 \times 0.7660$$
$$= 191.5000$$
$$= 191.5 \text{ m}$$

BDC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{DB}$

$$DB = \frac{CD}{\tan 60^\circ}$$

$$= \frac{160.7}{1.732}$$

$$= 92.78 \text{ m}$$

$\therefore$ AB මාර්ගයේ දිග $= 191.5 + 92.78$ m

$= \underline{\underline{284.28 \text{ m}}}$

18.7 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන තොරතුරුවලට අදාළ දළ රූප සටහන් අඳින්න.

(i) A සිට 080°ක දිගංශයකින් හා මීටර 12ක් දුරින් B පිහිටා ඇත.

(ii) P සිට 120°ක දිගංශයකින් හා මීටර 50ක් දුරින් Q ද, Q සිට 040°ක දිගංශයකින් හා මීටර 25ක් දුරින් R ද පිහිටයි.

(iii) X සිට 150° ක දිගංශයකින් හා මීටර 30ක් දුරින් Y ද, Y සිට 200° ක දිගංශයකින් හා මීටර 100ක් දුරින් Z ද, Z සිට 080° ක දිගංශයකින් හා මීටර 50ක් දුරින් A ද පිහිටයි.

2. A නම් ස්ථානයෙන් ගමන් අරඹන යතුරුපැදිකරුවෙක්, නැගෙනහිර දිශාව ඔස්සේ කිලෝමීටර 8ක් ගොස්, එතැනින් උතුරු දිශාවට හැරී, කිලෝමීටර 6ක් ගමන් කර B නම් ස්ථානයේ නතර වේ.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූප සටහනකින් දක්වන්න.

(ii) B සිට A හි දිගංශය සොයන්න.

(iii) A හා B අතර කෙටිම දුර සොයන්න.

3. නැවක්, A නම් වරායෙන් පිටත්ව 040°ක දිගංශයකින්, කිලෝමීටර 150ක් දුර යාත්‍රා කර B වරායට ළඟා වේ. B වරාය පිහිටා ඇත්තේ,

(i) A වරායට කවර දුරක් උතුරින් ද?

(ii) A වරායට කවර දුරක් නැගෙනහිරින් ද?

4. සෘජු සමාන්තර ඉවුරු සහිත ගඟක පළල මැන ගැනීමට උත්සාහ දරණ ශිෂ්‍යයෙක්, ඉවුරේ ලක්ෂ්‍යයක හිඳ, ඊට ප්‍රතිවිරුද්ධ ඉවුරේ, ඉවුරුවලට ලම්බක දිශාවක පිහිටි ගසක් නිරීක්ෂණය කරයි. එතැන් සිට මීටර 75 ක් ඉවුර දිගේ ගොස් බැලූ විට ගස පිහිටි දිගංශය 210°ක් බව නිරීක්ෂණය කළේ ය. දිගංශය සහිත දළ රූපසටහනක් ඇඳ ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත භාවිතයෙන් ගඟේ පළල ආසන්න මීටරයට සොයන්න.

5. වන රක්ෂිත කණ්ඩායමක් විසින් ඈත වනය තුළ හටගෙන ඇති ගින්නක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබී ය. ඔවුහු ඒ මොහොතේ ලබා ගත් තොරතුරු අනුව C කඳවුරේ සිට 070° ක වූ දිගංශයකින් පිහිටි A මහා මාර්ගය ඔස්සේ 2.5 kmක් ගොස් P ස්ථානයටත් එම ස්ථානයෙන්, 340° ක දිගංශයකින් 1.5 km ගොස් F නම් ගින්න තිබූ ස්ථානයටත් ළඟා වූහ.

(i) මෙම තොරතුරු දළ රූප සටහනකින් දක්වන්න.

(ii) ආරක්ෂක භටයින් කණ්ඩායම මහා මාර්ගයේ සිට ගින්න තිබූ තැනට ඉක්මනින් ළඟා වීමට P ස්ථානයෙන් හැරීමට තෝරා ගැනීම සුදුසු බව හේතු දක්වමින් පෙන්වන්න.

(iii) ආරක්ෂක භටයින් සිය කඳවුරේ දී මුල් වරට ගින්න නිරීක්ෂණය කරන්නට ඇත්තේ කවර දිගංශයකින් ද?

18.8 ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සඳහා ගණකය භාවිතය

ගණකය භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සම්බන්ධ ගණනය කිරීම්වල දී මුලින් ම, දර්ශන තිරයේ "*DEG*" ප්‍රදර්ශණය වන සේ, MODE යතුර ක්‍රියාත්මක කරවිය යුතු ය.

මෙම ගණනය කිරීම් සිදුකරන අයුරු නිදසුන් ඇසුරෙන් බලමු.

නිදසුන 1

(i) tan 35° (ii) sin 35° (iii) cos 35° යන අගයන් ලබා ගැනීම සඳහා ගණකයේ යතුරු ක්‍රියාත්මක කරවන ආකාරය ගැලීම් සටහනකින් දක්වන්න.

(i) tan 35° ON — tan — 3 — 5 — = → 0.7002

(ii) sin 35° ON — sin — 3 — 5 — = → 0.5736

(iii) cos 35° ON — cos — 3 — 5 — = → 0.8192

නිදසුන 2

(i) tan $\theta = 1.2131$ (ii) sin $\theta = 0.7509$ (iii) cos $\theta = 0.5948$ වූ විට එක් එක් අවස්ථාවේ දී θ හි අගය ගණනය

(i) ON — SHIFT — tan — 1 — . — 2 — 1 — 3 — 1 — = → 50.5°

(ii) ON — SHIFT — sin — 0 — . — 7 — 5 — 0 — 9 — = → 48.66°

(iii) ON — SHIFT — cos — 0 — . — 5 — 9 — 4 — 8 — = → 53.5°

සටහන: මෙහි දී අංශකවලින් පමණක් කෝණවල අගය ලැබෙන බව නිරීක්ෂණය කරන්න. නිදසුනක් ලෙස, අංශක 50.5 යනු $50^\circ\ 30'$ වේ.

18.8 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන කෝණ අගයයන් සඳහා (i) tan අගය (ii) sin අගය (iii) cos අගය ගණකය භාවිතයෙන් ලබා ගැනීමට ක්‍රියාත්මක කළ යුතු යතුරු පිළිවෙළින් දක්වන්න.
   a. 40° **b.** 75° **c.** 88° **d.** 43°

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවේ θ හි අගය ලබා ගැනීමට ගණනය ක්‍රියාත්මක කළ යුතු ආකාරය ගැලීම් සටහනකින් දක්වන්න.
   a. $\sin\theta = 0.9100$ **d.** $\cos\theta = 0.1853$ **g.** $\tan\theta = 0.5736$
   b. $\sin\theta = 0.7112$ **e.** $\cos\theta = 0.7089$ **h.** $\tan\theta = 0.7716$
   c. $\sin\theta = 0.1851$ **f.** $\cos\theta = 0.4550$ **i.** $\tan\theta = 0.9827$

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. P හා Q නැව් දෙකක් වරායකින්, එක විට පිටත් වෙයි. එක් එක් නැව පැයට කිලෝ මීටර 18ක් වූ සමාන වේගයෙන් ගමන් කරයි. P යාත්‍රා කරන්නේ වරායේ සිට 010° දිගංශයක වන අතර, Q යාත්‍රා කරන්නේ වරායේ සිට 320° ක දිගංශයකිනි. පැයකට පසු නැව් දෙක අතර දුර සොයන්න.

2. පාර දෙපස පිහිටි උස් ගොඩනැගිලි දෙකකින් එකක් අනෙකට වඩා මීටර 9ක් උස වේ. උසින් වැඩි ගොඩනැගිල්ලේ පාමුල සිට බලන විට අනෙක මුදුනේ ආරෝහණ කෝණය $42^{\circ}\,20'$ කි. උසින් අඩු ගොඩනැගිල්ල මීටර 15ක් උස නම්, නිරීක්ෂකයාගේ උස නොසලකා හරිමින්,
   (i) ගොඩනැගිලි දෙක අතර දුර සොයන්න.
   (ii) උසින් අඩු ගොඩනැගිල්ලේ පාමුල සිට උසින් වැඩි ගොඩනැගිල්ලේ මුදුන පෙනෙන ආරෝහණ කෝණය සොයන්න.

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ $AB = 10$ cm, $BC = 7$ cm හා $A\hat{B}C = 30^{\circ}\,26'$ වේ. A සිට BCට ඇඳි ලම්බය AX වේ. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

4. තිරස් තලයක පිහිටි කොඩි කණු දෙකක් බිමට සිටුවා ඇති ලක්ෂ්‍ය දෙක යා කරන රේඛාව මත A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක් තිබේ. A හි සිට බැලූ විට කොඩි කණු මුදුන්වල ආරෝහණ කෝණ 30° ද, 60° ද වේ. B සිට බැලූ විට ඒවායේ ආරෝහණ කෝණ පිළිවෙළින් 60° ද 45° ද වේ. AB දිග 10 m නම්
   (i) කොඩි කණු දෙකේ උස වෙන වෙන ම සොයන්න.
   (ii) කොඩි කණු දෙක අතර දුර සොයන්න.

*. මෙම අභ්‍යාසයේ පිළිතුරු ගණක යන්ත්‍රය භාවිතයෙන් නැවත පරීක්ෂා කරන්න.

19 න්‍යාස

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- න්‍යාසයක් හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාසයක, අවයව සහ ගණය හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාස එකතු කිරීම සහ අඩු කිරීම හඳුනා ගැනීමට
- න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීමට
- න්‍යාසයක් තවත් න්‍යාසයකින් ගුණ කිරීමට
- න්‍යාස ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

19.1 න්‍යාස හැඳින්වීම

න්‍යාස පිළිබඳ අදහස1854 දී බ්‍රිතාන්‍ය ගණිතඥයෙකු වූ ආතර් කේලි විසින් හඳුන්වා දෙන ලදි. සරල උදාහරණයක් මගින් න්‍යාස හඳුනා ගනිමු.

වාර පරීක්ෂණයක දී ගණිතය සහ විද්‍යාව යන විෂයන් සඳහා විමල්, ෆාරුක් හා රාධා ලබා ගත් ලකුණු පහත වගුවේ දැක්වේ.

	ගණිතය	විද්‍යාව
විමල්	75	66
ෆාරුක්	72	70
රාධා	63	81

වගුවේ ඇති සංඛ්‍යාත්මක අගයන්, පහත දැක්වෙන ආකාරයට න්‍යාසයකින් දැක්විය හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 75 & 66 \\ 72 & 70 \\ 63 & 81 \end{pmatrix}$$

මෙහි තීරවලින් විෂයනුත් පේළිවලින් ශිෂ්‍යයනුත් දැක්වේ. එසේ ම, පහත දැක්වෙන පරිදි ද න්‍යාස ආකාරයෙන් දැක්විය හැකි ය.

$$\begin{pmatrix} 75 & 72 & 63 \\ 66 & 70 & 81 \end{pmatrix}$$

මෙහි, තීරු මගින් ශිෂ්‍යයනුත් පේළි මගින් විෂයනුත් දැක්වේ.

මෙලෙස පේළි සහ තීරු ආකාරයෙන් සැකසූ සංඛ්‍යා වැලක් **න්‍යාසයක්** ලෙස හැඳින්වේ.

පහත දැක්වෙන්නේ න්‍යාස සඳහා නිදසුන් කිහිපයකි.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයක අඩංගු සංඛ්‍යාවලට න්‍යාසයේ අවයව යයි කියනු ලැබේ. අවයව සංඛ්‍යා ආකාරයෙන් මෙන් ම වීජීය සංකේත හෝ ප්‍රකාශන ලෙස ද තිබිය හැකි ය.

න්‍යාසයක් නම් කරනු ලබන්නේ ඉංග්‍රීසි ලොකු අකුරු (Capital letters) වලිනි. අවයව සඳහා විජීය සංකේත යොදන අවස්ථාවල, න්‍යාසයේ අවයව ඉංග්‍රීසි කුඩා අකුරෙන් (Simple letters) දක්වයි.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන්නේ න්‍යාස තුනක් නම් කර ඇති ආකාරය යි.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & c \\ a & b \end{pmatrix}$$

නිදසුන 2

කාටිසීය ඛණ්ඩාංක තලයක පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංක (0, 5) (4, 3) වේ. මෙම තොරතුරු න්‍යාසයකින් දක්වන්න. එය P ලෙස නම් කරන්න.

වගුවක් ලෙස

	A	B
x	0	4
y	5	3

න්‍යාසයක් ලෙස

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

න්‍යාසයක ගණය හා විශේෂ න්‍යාස වර්ග කිහිපයක්

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය සලකන්න.

A න්‍යාසයේ ඇති පේළි ගණන 2 කි. තීර ගණන 3 කි. න්‍යාසයේ ගණය පේළි සහ තීර ඇසුරෙන් 2×3 ලෙස දක්වනු ලැබේ. A යනු "දෙකේ තුනේ" න්‍යාසයක් යැයි කියනු ලැබේ.

ඒ බව

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$ ලෙස සමහර අවස්ථාවල දී ලියනු ලැබේ.

සටහන: ඉහත ආකාරයට න්‍යාසයක ගණය සඳහන් කිරීමේ දී පළමුව පේළි ගණන ද පසුව තීර ගණන ද සඳහන් කිරීම සම්මතය වේ.

නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන එක් එක් න්‍යාසයේ ගණය ලියන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

න්‍යාසයේ පේළි ගණන $= 3$
න්‍යාසයේ තීර ගණන $= 2$
න්‍යාසයේ ගණය $= 3 \times 2$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 1$
තීර ගණන $= 3$
න්‍යාසයේ ගණය $= 1 \times 3$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 2$
තීර ගණන $= 1$
න්‍යාසයේ ගණය $= 2 \times 1$

(iv) $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

පේළි ගණන $= 2$
තීර ගණන $= 2$
න්‍යාසයේ ගණය $= 2 \times 2$

පේළි න්‍යාස, තීර න්‍යාස සහ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස

එක් පේළියක් පමණක් ඇති න්‍යාස **පේළි න්‍යාස** ලෙසත්, එක් තීරයක් පමණක් ඇති න්‍යාස **තීර න්‍යාස** ලෙසත්, පේළි ගණන හා තීර ගණන සමාන වන න්‍යාස **සමචතුරස්‍ර න්‍යාස** ලෙසත් හැඳින්වේ. පේළි 2ක් හා තීර 2ක් ඇති න්‍යාසයක ගණය, ගණය 2 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් යැයි ද පේළි 3ක් හා තීර 3ක් ඇති න්‍යාසයක ගණය, ගණය 3 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ආදි ලෙස නම් කෙරේ.

පේළි, තීර හා සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා නිදසුන් ලෙස

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ යනු පේළි න්‍යාසයකි.

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ යනු තීර න්‍යාසයකි.

$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ යනු සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

ඒකක න්‍යාස සහ සමමිති න්‍යාස

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ඉහත දැක්වෙන සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයේ කොටු කර දක්වා ඇත්තේ ප්‍රධාන විකර්ණයයි. ඉහළ වම් කෙළවරේ සිට පහළ දකුණත් කෙළවර දක්වා ඇති අවයව දාමය ප්‍රධාන විකර්ණය ලෙස හැඳින්වේ.

සටහන: ප්‍රධාන විකර්ණය අර්ථ දැක්වෙන්නේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි. ප්‍රධාන විකර්ණය බොහෝ විට, සරලව, විකර්ණය යන නමින් ද හැඳින්වේ.

පහත කොටුකර දක්වා ඇත්තේ ගණය 2×2 වූ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක ප්‍රධාන විකර්ණය යි.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

පහත දැක්වෙන න්‍යාසය විශේෂ ආකාරයේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයකි.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A න්‍යාසයේ ප්‍රධාන විකර්ණයේ පිහිටි සියලු අවයවවල අගය 1 වේ. විකර්ණයේ පිහිටි අවයව හැර ඉතිරි අවයව සියල්ල 0 වේ. මෙවැනි න්‍යාසයක් **ඒකක න්‍යාසයක්** ලෙස හැඳින්වේ. A යනු ගණය 3×3 වූ ඒකක න්‍යාසයකි. පහත දැක්වෙන්නේ ගණය 2×2 වූ ඒකක න්‍යාසයකි.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ඒකක න්‍යාස නම් කිරීම සඳහා I අක්ෂරය යොදා ගැනේ. පේළි n හා තීර n සහිත ඒකක න්‍යාස $I_{n \times n}$ මගින් ලියා දැක්වේ. ඒ අනුව,

$$I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලියා දැක්වේ.

පහත දැක්වෙන න්‍යාසයෙහි ඇති විශේෂත්වය ඔබට නිරීක්ෂණය කළ හැකි ද?

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

X හි ප්‍රධාන විකර්ණය වටා ඇති අවයව නිරීක්ෂණය කරන්න. ප්‍රධාන විකර්ණය වටා ඇති සමාන අගයන්ගෙන් යුත් අවයව සමමිතික ව පිහිටා ඇත. මෙවැනි ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටන න්‍යාස **සමමිති න්‍යාස** ලෙස හැඳින්වේ.

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y සහ I න්‍යාසවල ප්‍රධාන විකර්ණය වටා සමාන අවයව සමමිතික ව පිහිටා ඇත. ඒ නිසා Y සහ I සමමිති න්‍යාස වේ.

සටහන: සමමිති න්‍යාස අර්ථ දැක්වෙන්නේ ද සමචතුරස්‍ර න්‍යාස සඳහා පමණි.

19.1 අභ්‍යාසය

1. පලතුරු වෙළඳ සැලකින් සරත් දොඩම් ගෙඩි 2ක් සහ අඹ ගෙඩි 3ක් ද කමල් දොඩම් ගෙඩි 4ක් සහ අඹ ගෙඩි 1ක් ද රාජු දොඩම් ගෙඩි 1ක් සහ අඹ ගෙඩි 5ක් ද මිල දී ගනියි.

(i) සරත් මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

(ii) කමල් මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

(iii) රාජු මිලදී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ පේළි න්‍යාසයකින් දක්වන්න.

(iv) සරත්, කමල් සහ රාජු මිල දී ගත් පලතුරු ප්‍රමාණ, පේළි ලෙස ඇති න්‍යාසයක් ගොඩනගන්න.

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් න්‍යාසයේ ගණය ලියා දක්වන්න.

(i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ (ii) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}$ (v) $E = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ (vi) $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. පහත දැක්වෙන න්‍යාස අතරින් පේළි හා තීර න්‍යාස තෝරා ලියා දක්වන්න.

(i) $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $R = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (v) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. පහත දැක්වෙන න්‍යාස අතරින්

(i) සමචතුරස්‍ර න්‍යාස
(ii) සමමිති න්‍යාස
(iii) ඒකක න්‍යාස තෝරා ලියන්න.

සමචතුරස්‍ර න්‍යාසවල විකර්ණ කොටු කර දක්වන්න.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

19.2 න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම

සංඛ්‍යා සඳහා එකතු කිරීම, අඩු කිරීම, ගුණ කිරීම ආදි ගණිත කර්ම අපි උගෙන ඇත්තෙමු. එවැනි ගණිත කර්ම යොදා ගැනීමෙන් බොහෝ ප්‍රායෝගික ගැටලු පහසුවෙන් විසඳා ගත හැකි බව ද අපි අත් දැක ඇත්තෙමු. න්‍යාස සඳහා ද ගණිත කර්ම අර්ථ දැක්විය හැකි ය. මුලින් ම න්‍යාස එකතු කිරීම පිළිබඳ ව සලකා බලමු.

පහත දැක්වෙන A හා B න්‍යාස දෙක සලකන්න.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

මෙම න්‍යාස දෙක ම එකම ගණය සහිත න්‍යාස යි. එම ගණය 3×2 වේ. A හා B න්‍යාස දෙකෙහි එකතුව ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ A හා B න්‍යාසවල අනුරූප අවයව එකතු කිරීමෙන් ලැබෙන න්‍යාසය යි.

ඒ අනුව,

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 9 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$$ ලෙස ලැබේ.

මෙහි දී අනුරූප අවයව ලෙස හැඳින්වෙන්නේ එක ම ස්ථානයේ පිහිටි අවයව යි. නිදසුනක් ලෙස, A න්‍යාසයෙහි පළමු පේළියට හා දෙවන තීරයට අයත් අවයවය වන්නේ 1ය. B න්‍යාසයෙහි ඊට අනුරූප අවයවය වන්නේ 6ය; එනම්, B න්‍යාසයෙහි පළමු පේළියට හා දෙවන තිරයට අයත් අවයවයයි.

දැන් වීජීය සංකේත සහිත නිදසුනක් සලකමු.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \text{ හා } Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \text{ නම්, } X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 & x_4 + y_4 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස එකතු කිරීම අර්ථ දක්වා ඇත්තේ එක ම ගණය සහිත න්‍යාසවලට පමණි. ඒ අනුව, ගණ වෙනස් වන න්‍යාස සඳහා න්‍යාස එකතු කිරීම අර්ථ නොදැක්වේ.

න්‍යාස එකතු කිරීම යොදා ගත හැකි ආකාරය නිදසුනක් ඇසුරෙන් දැන් සලකා බලමු. මෙම නිදසුන ඉතා සරල වුවත්, ප්‍රායෝගික යෙදීම් සඳහා න්‍යාස යොදා ගන්නා ආකාරය එයින් මනාව පිළිඹිබු වේ.

නිදසුන 1

ප්‍රවීන් හා තරිඳු පාසල් ක්‍රිකට් කණ්ඩායමේ පන්දු යවන්නන් දෙදෙනෙකි. 2014 හා 2015 වසරවලදී පැවැත්වුණු එක් දින හා දෙදින පාසල් තරගමාලාවල දී ඔවුන් දෙදෙනා ලබා ගත් කඩුලු ප්‍රමාණ පිළිබඳ විස්තර පහත වගු දෙකෙහි දැක්වේ.

	2014	2015
ප්‍රවීන්	21	23
තරිඳු	15	16

එක් දින තරගවලදී ලැබූ කඩුලු

	2014	2015
ප්‍රවීන්	14	16
තරිඳු	9	19

දෙදින තරගවලදී ලැබූ කඩුලු

එක් දින තරග සඳහා විස්තර දැක්වෙන න්‍යාසය A ලෙසත්, දෙදින තරග සඳහා විස්තර දැක්වෙන න්‍යාසය B ලෙසත් නම් කරමු. එවිට,

$A = \begin{pmatrix} 21 & 23 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 19 \end{pmatrix}$ ලෙස ලිවිය හැකි ය. මෙම න්‍යාසවල, තීර මගින් වසර සහ පේළි මගින් පන්දු යවන්නන් දැක්වේ. $A + B$ න්‍යාසය සොයමු.

.

$$A + B = \begin{pmatrix} 35 & 39 \\ 24 & 35 \end{pmatrix}$$

මෙම $A + B$ න්‍යාසයෙන් දැක්වෙන්නේ කුමක්දැයි සිතා බලන්න. එයින් දැක්වෙන්නේ ප්‍රවීන් හා තරිඳු 2014 වසරේදීත් 2015 වසරේදීත් එක් දින හා දෙදින තරඟවලදී ලබාගත් මුළු කඩුලු ප්‍රමාණ පිළිබඳ තොරතුරු ය. එය, වගුවක ආකාරයෙන් මෙසේ දැක්විය හැකි ය.

	2014	2015
ප්‍රවීන්	35	39
තරිඳු	24	35

මුළු කඩුලු ගණන

න්‍යාසයකින් තවත් න්‍යාසයක් අඩු කිරීම ද මේ ආකාරයට අර්ථ දැක්වේ. එහි දී සිදු කරන්නේ අනුරූප අවයව අඩු කිරීමයි. මේ සඳහා ද න්‍යාස දෙක එක ම ගණයේ විය යුතු ය. නිදසුනක් ලෙස,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ හා } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ නම්, } A - B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ වේ.}$$

තවත් නිදසුනක් සලකමු.

X යනු ගණය 3×3 වන සෑම අවයවයක්ම 2 වන න්‍යාසය ද Y යනු ගණය 3×3 වන ඒකක න්‍යාසය ද නම් $X - Y$ න්‍යාසය සොයන්න.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ හා } Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ වේ.}$$

එමනිසා,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

න්‍යාස දෙකක සමානතාව

න්‍යාස දෙකක් එකිනෙකට සමාන වේ යන්නෙහි තේරුම කුමක්දැයි විමසා බලමු.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A හා B න්‍යාස සමාන වීමට $a = 2, b = 3, c = 10$ හා $d = 9$ විය යුතු ය. එනම්, එක් න්‍යාසයක එක් එක් අවයවය අනෙක් න්‍යාසයේ අනුරූප අවයවයට සමාන විය යුතු ය. එවැනි අවස්ථාවක දී න්‍යාස දෙක සමාන වේ යැයි කියනු ලැබේ.

සටහන: න්‍යාස දෙකක සමානතාව අර්ථ දැක්වෙන්නේ ද ගණය සමාන වූ න්‍යාස සඳහා පමණ යි.

19.2 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

2. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (vi) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ නම් a, b සහ c හි අගය සොයන්න.

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ නම් a , b , c සහ d හි අගය සොයන්න.

5. $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ නම් x, y සහ z හි අගය සොයන්න.

6. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ නම් x සහ y සොයන්න.

19.3 න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම

මීළඟට අපි න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම පිළිබඳ ව සලකා බලමු. න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම ලෙස අර්ථ දැක්වෙන්නේ න්‍යාසයේ සෑම අවයවයක් ම සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කිරීමයි. A න්‍යාසය k සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට ලැබෙන න්‍යාසය kA ලෙස ලියනු ලැබේ. මෙහි දී න්‍යාසයක් නිඛිලයකින් ගුණ කිරීම පිළිබඳ ව පමණක් අවධානය යොමු කරමු. නිදසුනක් ලෙස,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

A න්‍යාසය 5න් ගුණ කල විට ලැබෙන න්‍යාසය වන්නේ

$$5A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 & 5 \times 1 & 5 \times 0 \\ 5 \times (-2) & 5 \times 8 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 0 \\ -10 & 40 & 5 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය යි.

A න්‍යාසය -3න් ගුණ කල විට ලැබෙන න්‍යාසය වන්නේ

$$-3A = \begin{pmatrix} -3 \times 3 & -3 \times 1 & -3 \times 0 \\ -3 \times -2 & -3 \times 8 & -3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & -24 & -3 \end{pmatrix}$$ න්‍යාසය යි.

සටහන: A නම් න්‍යාසයක් k නම් සංඛ්‍යාවෙන් ගුණ කළ විට ලැබෙන න්‍යාසයේ ගණය A හි ගණය ම වේ.

නිදසුන: $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ නම් $3X - 2Y$ න්‍යාසය සොයන්න.

$$3X - 2Y = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}}$$

19.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $4\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (iii) $3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(iv) $-2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (v) $3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (vi) $-2\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ නම් a, b, c සහ d හි අගයන් සොයන්න.

3. $4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ නම් x , y සහ z හි අගයන් සොයන්න.

4. $2\begin{pmatrix} 5 & x \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} y & -5 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ නම් x , y, a හා b හි අගයන් සොයන්න.

19.4 න්‍යාස ගුණ කිරීම

ඉහත අර්ථ දැක්වුණු න්‍යාස එකතු කිරීම, න්‍යාස අඩු කිරීම හා න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කිරීම යන ගණිත කර්ම, සංඛ්‍යා සඳහා වූ ගණිත කර්ම ආකාරයේ ම බව ඔබට වැටහෙන්නට ඇත. එසේ නමුත්, න්‍යාස ගුණ කිරීම අර්ථ දැක්වෙන්නේ තරමක් වෙනස් ස්වරූපයකිනි. න්‍යාස ගුණ කිරීම පහත පරිදි විස්තර කළ හැකි ය.

මුලින් ම පේළි න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයකින් ගුණ කරන අයුරු සලකා බලමු. A යනු ගණය $1 \times m$ වන පේළි න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය $m \times 1$ වන තීර න්‍යාසයක් ද වන විට AB යන ගුණිතය අර්ථ දැක්වේ. එම ගුණිතය අර්ථ දැක්වෙන ආකාරය විස්තර කිරීම සඳහා නිදසුනක් ලෙස

$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ද $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ලෙස ද ගනිමු. ඒ අනුව, A යනු ගණය 1×2 වන න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය 2×1 වන න්‍යාසයක් ද වේ. එවිට,

$$AB = (a_1b_1 + a_2b_2)_{1 \times 1}$$

ලෙස AB ගුණිතය අර්ථ දැක්වේ.

නිදසුන 1

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix}$ හා $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් AB සොයන්න.

$$AB = (5 \times 3 + 2 \times 1) = (17)$$

ඕනෑ ම න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවකින් ගුණ කළ හැකි බව අපි ඉහත දී ඉගෙන ගත්තෙමු. නමුත්, න්‍යාස එකතු කිරීම හා අඩු කිරීම කළ හැක්කේ ගණ සමාන වූ විට දී පමණක් බව ද අපි ඉගෙන ගත්තෙමු. න්‍යාස ගුණ කිරීම කිරීම කළ හැක්කේ ද සමහර අවස්ථාවල දී පමණි. ඉහත දී අපි දුටුවේ පේළි න්‍යාසයක් තීර න්‍යාසයකින් ගුණ කරන අයුරුය. එහෙත්, ඊට වෙනස් ගණ සහිත න්‍යාස ද ගුණ කළ හැකි ය. වඩාත් සාධාරණ ව, A යනු $m \times n$ වන න්‍යාසයක් ද B යනු ගණය $n \times p$ වන න්‍යාසයක් ද නම්, එනම්, A හි තීර ගණනත් B හි පේළි ගණනත් සමාන වේ නම්, AB ගුණිතය අර්ථ දැක්විය හැකිය. ඒ කෙසේ දැයි දැන් සලකා බලමු. එවිට ලැබෙන න්‍යාසයයේ ගණය $m \times p$ බව ද නිරීක්ෂණය කරන්න.

නිදසුනක් ලෙස, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ හා $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$ නම් AB ගුණිතය සොයන අයුරු විමසා බලමු.

ඉහත පේළි න්‍යාසයක් හා තීර න්‍යාසයක් ගුණ කළ අයුරින්, A හි එක් එක් පේළිය B හි එක් එක් තීරයෙන් ගුණ කරන්න.

$$= \begin{pmatrix} (2\ \ 4)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} & (2\ \ 4)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} \\ (3\ \ 5)\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} & (3\ \ 5)\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 4\times 6 & 2\times 8 + 4\times 7 \\ 3\times 1 + 5\times 6 & 3\times 8 + 5\times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & 44 \\ 33 & 59 \end{pmatrix}$$ (එක් එක් ගුණිතය සෙවීමෙන්)

ඉහත AB ගුණිත න්‍යාසයෙහි අවයව අර්ථ දැක්වූ ආකාරය මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.

- AB හි පළමු පේළියට හා පළමු තිරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි පළමු පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි පළමු තිරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි පළමු පේළියට හා දෙවන තිරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි පළමු පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි දෙවන තිරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි දෙවන පේළියට හා පළමු තීරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි දෙවන පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි පළමු තීරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.
- AB හි දෙවන පේළියට හා දෙවන තීරයට අයත් අවයවය ලබාගන්නේ Aහි දෙවන පේළිය (පේළි න්‍යාසය) B හි දෙවන තීරයෙන් (තීර න්‍යාසයෙන්) ගුණ කිරීමෙනි.

මෙම ආකාරයට ඕනෑ ම ගුණ කළ හැකි න්‍යාස දෙකක් ගුණ කළ හැකි ය. තවත් නිදසුන් කිහිපයක් විමසා බලමු.

නිදසුන 2

$X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ හා $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ නම් XY අර්ථ දැක්වෙන බව පෙන්වා එම න්‍යාසය සොයන්න. YX න්‍යාසය අර්ථ දැක්වේ ද?

X හි තීර ගණන $= 2$ ද Y හි පේළි ගණන $= 2$ ද වේ.
එනම්, X හි තීර ගණන Y හි පේළි ගණනට සමාන වේ. එමනිසා, XY ගුණිත න්‍යාසය අර්ථ දැක්වේ.

දැන්,

$$XY = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

X හි එක් එක් පේළිය Y හි එක් එක් තීරයෙන් ගුණ කිරීමෙන්

$$= \begin{pmatrix} (4 \;\; 6) \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \\ (2 \;\; 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + 6 \times 7 \\ 2 \times 1 + 3 \times 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 46 \\ 23 \end{pmatrix}$$

දැන් YX ගුණිතය අර්ථ දැක්වේදැයි විමසා බලමු.
Yහි තීර ගණන 1 ද X හි පේළි ගණන 2 ද වේ. එනම්, Y හි තීර ගණන X හි පේළි ගණනට සමාන නොවේ. එමනිසා YX ගුණිතය අර්ථ නොදැක් වේ.

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ හා $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු. න්‍යාස ගුණිතය යටතේ මුලින් ම අපි QP ආකාරයේ ගුණිතය අර්ථ දක්වුයෙමු. එය ඉහත අර්ථ දැක්වීම අනුව ද සෙවිය හැකි ය. එනම් Q හි සෑම පේළියක් ම P හි සෑම තීරයකින් ම ගුණ කිරීමෙන් අවයව සෙවීමෙනි.

$$QP = \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

එනම්, තනි අවයවයක් සහිත න්‍යාසයකි. තනි අවයවයක් සහිත න්‍යාසයක් සංඛ්‍යාවක් ලෙස සැලකේ. එමනිසා, $QP = 9$ ලෙස ලියනු ලැබේ.

තව ද, මෙහි දී PQ ද අර්ථ දැක්වේ. PQ මගින් ලැබිය යුත්තේ ගණය 2×2 වන න්‍යාසයකි.

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 & 2 \times 3 \\ (-1) \times 6 & (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

19.4 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන න්‍යාස සුළු කරන්න.

(i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(vii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (viii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(ix) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (x) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ නම් a සහ b හි අගය සොයන්න.

3. A , B සහ C න්‍යාස තුනකි. $A \times B = C$ වේ. පහත දැක්වෙන වගුවේ හිස්තැන් පුරවන්න.

A න්‍යාසයේ ගණය	B න්‍යාසයේ ගණය	C න්‍යාසයේ ගණය
1 × 2	2 × 1	....
2 × 2	.... × 1	....
....× 2	.... × 1	1 × 1
.... ×	1 ×	2 × 2
.... × 1	.... × 2	1 × .....

4. $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ සහ $R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම්,

(i) $P \times Q$
(ii) $P \times R$
(iii) $Q \times R$ සොයන්න.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ නම්

(i) AB සොයන්න.
(ii) BA සොයන්න.
(iii) AB සහ BA අතර සම්බන්ධය කුමක්ද?

5. $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(i) CD සොයන්න.
(ii) DC සොයන්න.

20 අසමානතා

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- $ax + b \gtreqless cx + d$ ආකාරයේ අසමානතා විසඳීමට හා විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාව මත නිරූපණය කිරීමට
- එදිනෙදා ජීවිතයට සම්බන්ධ ගැටලු අසමානතා මගින් දැක්වීම හා එම ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

10 ශ්‍රේණියේ දී උගත් $ax + b \gtreqless c$ ආකාරයේ අසමානතා විසඳන අයුරු මතකයට නගා ගැනීමට පහත පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාව විසඳන්න.

a. $3x - 2 > 4$ **b.** $\frac{x}{2} + 5 \leq 7$ **c.** $5 - 2x > 11$

d. $\frac{x}{-2} + 3 \leq 5$ **e.** $\frac{5x}{6} + 4 \geq 14$ **f.** $3 - 2x \geq 9$

20.1 $ax + b \gtreqless cx + d$ ආකාරයේ අසමානතා විසඳීම

$ax + b \gtreqless cx + d$ ආකාරයේ අසමානතා වීජීය ලෙස විසඳන අයුරු හා එම විසඳුම් ජ්‍යාමිතිකව නිරූපණය කරන අයුරු නිදසුන් මගින් විමසා බලමු.

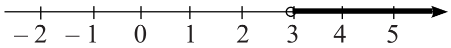
නිදසුන 1

$3x - 2 > 2x + 1$ අසමානතාව විසඳා එම විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

මෙහි දී, $3x - 2 > 2x + 1$ අසමානතාවෙහි x අඩංගු පද එක පසෙකටත්, සංඛ්‍යා අනෙක් පසටත් (සමීකරණ විසඳන අයුරින් ම) ගත යුතු ය.

$$3x - 2 > 2x + 1$$
$$3x - 2 + 2 > 2x + 1 + 2 \text{ (දෙපසට ම 2 එකතු කිරීමෙන්)}$$
$$3x > 2x + 3$$
$$3x - 2x > 2x + 3 - 2x \text{ (දෙපසින් ම } 2x \text{ අඩු කිරීමෙන්)}$$
$$\underline{\underline{x > 3}}$$

මෙය අසමානතාවේ විසඳුම යි. වචනයෙන් පැවසුවහොත්, විසඳුම් වන්නේ 3ට වඩා වැඩි සියලු තාත්වික සංඛ්‍යා යි. එම විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත පහත දැක්වෙන අයුරින් නිරූපණය කළ හැකි ය.



මෙහි දී 3 අයත් නොවන බව දැක්වීමට 3 දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යය වටා පාට නොකළ කවයක් අඳිනු ලැබේ.

නිදසුන 2

$5x + 3 \leq 3x + 1$ අසමානතාව විසඳා x ට ගත හැකි **නිඛිලමය විසඳුම්**, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

$$5x + 3 \leq 3x + 1$$

$$5x + 3 - 3 \leq 3x + 1 - 3 \quad \text{(දෙපසින් ම 3 අඩු කිරීමෙන්)}$$

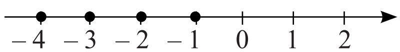
$$5x \leq 3x - 2$$

$$5x - 3x \leq 3x - 2 - 3x \quad \text{(දෙපසින් ම } 3x \text{ අඩු කිරීමෙන්)}$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{-2}{2} \quad \text{(දෙපස ම 2න් බෙදීමෙන්)}$$

$$\underline{\underline{x \leq -1}}$$

ඒ අනුව, විසඳුම් වන්නේ – 1 ට අඩු හෝ සමාන සියලු තාත්වික සංඛ්‍යා යි. නිඛිලමය විසඳුම් වන්නේ – 1 ට අඩු හෝ සමාන සියලු නිඛිල යි. එනම් – 1, – 2, – 3 ආදි සංඛ්‍යා යි. සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත එම විසඳුම් මෙසේ නිරූපණය කළ හැකි ය.



සටහන: විශේෂ වශයෙන්, නිඛිලමය විසඳුම් ලෙස ගැටලුවෙහි අසා නොමැති නම්, විසඳුම් ලෙස සැලකිය යුත්තේ තාත්වික සංඛ්‍යායි.

නිදසුන 3

$2x - 5 \geq 4x - 4$ අසමානතාව විසඳා x ට ගත හැකි විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

$$2x - 5 \geq 4x - 4$$

$$2x - 5 + 5 \geq 4x - 4 + 5 \quad \text{(දෙපසට ම 5ක් එකතු කිරීමෙන්)}$$

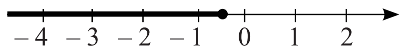
$$2x \geq 4x + 1$$

$$2x - 4x \geq 4x + 1 - 4x \quad \text{(දෙපසින් ම } 4x \text{ අඩු කිරීමෙන්)}$$

$$-2x \geq 1$$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{1}{-2} \quad \text{(දෙපස ම – 2 න් බෙදීමෙන්)}$$

$$\underline{\underline{x \leq \frac{-1}{2}}}$$



සටහන: සෘණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීමේ දී අසමානතා ලකුණ මාරු කළ යුතු බව සිහිතබා ගන්න. සෘණ සංඛ්‍යාවකින් බෙදීමක් නොවන පරිදි මෙම ගැටලුව විසඳන අයුරු ද විමසා බලන්න.

20.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාව විසඳන්න. නිඛිලමය විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

a. $3x - 4 > 2x$ **b.** $6x + 5 \geq 5x$

c. $2x - 9 \leq 5x$ **d.** $8 - 3x > x$

e. $5 - 2x \leq 3x$ **f.** $12 - x > 3x$

2. පහත දැක්වෙන එක් එක් අසමානතාව විසඳා x ට ගත හැකි සියලු විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

a. $2x - 4 > x + 3$ **b.** $3x + 5 < x + 1$

c. $3x + 8 \geq 3 - 2x$ **d.** $5x + 7 \geq x - 5$

e. $3x - 8 \leq 5x + 2$ **f.** $2x + 3 \geq 5x - 6$

g. $x - 9 > 6x + 1$ **h.** $5x - 12 \leq 9x + 4$

i. $\dfrac{3x + 2}{2} > x + 3$ **j.** $2x - 5 \leq \dfrac{3x - 4}{-2}$

20.2 අසමානතා මගින් ගැටලු විසඳීම

නිදසුන 1

සමාන බරැති තේ පැකට් 8ක් සහ 1kg සීනි පැකට් 3ක් මල්ලක දමා ඇත. මල්ලට දැරිය හැකි උපරිම බර ප්‍රමාණය 5 kg වේ.

(i) තේ පැකට්ටුවක බර ග්‍රෑම් x ලෙස ගෙන x ඇතුළත් අසමානතාවක් ගොඩනගන්න.

(ii) අසමානතාව විසඳා තේ පැකට්ටුවක තිබිය හැකි උපරිම බර සොයන්න.

සියල්ල ග්‍රෑම්වලට හරවා ගැනීම පහසු ය.

(i) තේ පැකට්ටුවක බර ග්‍රෑම්වලින් $= x$
තේ පැකට් 8ක බර ග්‍රෑම්වලින් $= 8x$
සීනිවල බර ග්‍රෑම්වලින් $= 3 \times 1000$
$= 3000$
මල්ලට දැරිය හැකි උපරිම බර ග්‍රෑම්වලින් $= 5 \times 1000$
$= 5000$

දී ඇති දත්ත අනුව $8x + 3000 \leq 5000$
මෙය අවශ්‍ය අසමානතාව යි.

(ii) $8x + 3000 \leq 5000$
$8x + 3000 - 3000 \leq 5000 - 3000$
$\frac{8x}{8} \leq \frac{2000}{8}$
$x \leq 250$

$\therefore$ තේ පැකට්ටුවක උපරිම බර $= 250\text{g}$

නිදසුන 2

සරත් අභ්‍යාස පොත් 5ක් සහ පෑන් 3ක් ද, කමනි, අභ්‍යාස පොත් 3ක් සහ පෑන් 11ක් ද මිලදී ගනී. සරත් වියදම් කළ මුදල කමනි වියදම් කළ මුදලට වඩා වැඩි හෝ සමාන වේ. තව ද පෑනක මිල රුපියල් 10ක් ද වේ.

(i) අභ්‍යාස පොතක මිල රුපියල් x ලෙස ගෙන x ඇතුළත් අසමානතාවක් ලියන්න.

(ii) අසමානතාව විසඳා පොතක අවම මිල සොයන්න.

(i) සරත් මිලදී ගත් පොත්වල මිල = රු $5x$
සරත් වියදම් කළ මුදල = රු $5x + 30$
එලෙසම, කමනි වියදම් කළ මුදල = රු $3x + 110$

දී ඇති දත්ත අනුව,

$$5x + 30 \geq 3x + 110$$

මෙය අවශ්‍ය අසමානතාවයි.

(ii) $5x + 30 \geq 3x + 110$
$5x + 30 - 30 \geq 3x + 110 - 30$

$$5x \geq 3x + 80$$
$$5x - 3x \geq 3x + 80 - 3x$$
$$\frac{2x}{2} \geq \frac{80}{2}$$
$$x \geq 40$$

$\therefore$ අභ්‍යාස පොතක අවම මිල රුපියල් 40 වේ.

20.2 අභ්‍යාසය

1. කුඩා ට්‍රැක්ටරයක එකක් 50 kg බැගින් වූ සිමෙන්ති කොට්ට 5ක් සහ සමාන බරැති කම්බිකූරු 30ක් පටවා ඇත. ට්‍රැක්ටරයේ ගෙන යා හැකි උපරිම බර ප්‍රමාණය 700 kg කි.

(i) කම්බි කූරක බර x kg ලෙස ගෙන ඉහත තොරතුරු ඇසුරෙන් අසමානතාවක් ගොඩනගන්න.

(ii) කම්බිකූරක උපරිම බර සොයන්න.

2. A නම් පෙට්ටියක කුඩා බිස්කට් පැකට් 12ක් සහ 200g වූ බිස්කට් පැකට් 5ක් ද, B නම් පෙට්ටියක කුඩා බිස්කට් පැකට් 4ක් සහ 200g බිස්කට් පැකට් 9ක් ද අසුරා ඇත. A පෙට්ටියේ ඇති බිස්කට්වල බර, B පෙට්ටියේ ඇති බිස්කට්වල බරට වඩා අඩු හෝ සමාන වේ.

(i) කුඩා බිස්කට් පැකට්ටුවක බර ග්‍රෑම් x ලෙස ගෙන, දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු අසමානතාවක් ලියන්න.

(ii) කුඩා බිස්කට් පැකට්ටුවක උපරිම බර සොයන්න.

3. වැඩපොලක පුහුණු සහ නොපුහුණු කම්කරුවෝ සේවය කරති. පුහුණු කම්කරුවකුගේ දිනක වැටුප රුපියල් 1200කි. පුහුණු කම්කරුවන් 5 දෙනෙකුගේ සහ නුපුහුණු කම්කරුවන් 7 දෙනෙකුගේ දිනක වැටුප් සඳහා වැයවන මුදල පුහුණු කම්කරුවන් 7 දෙනෙකුගේ සහ නුපුහුණු කම්කරුවන් 4 දෙනෙකුගේ වැටුපට සමාන හෝ විශාල වේ.

(i) නුපුහුණු කම්කරුවකුගේ දිනක වැටුප රුපියල් x ලෙස ගෙන, ඉහත තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු අසමානතාවක් ගොඩනගන්න.

(ii) අසමානතාව විසඳා නුපුහුණු කම්කරුවෙකුගේ දිනක අවම වැටුප සොයන්න.

4. බරින් සමාන තේ පැකට් 5ක් සහ සීනි කිලෝග්‍රෑම් 3ක මුළු බර, තේ පැකට් 25ක බරට වඩා වැඩි හෝ සමාන වේ. මෙම තොරතුරු ඇසුරෙන් අසමානතාවක් ගොඩනගා තේ පැකැට්ටුවක අවම බර සොයන්න.

5. කාමර දෙකක පිඟන් ගඩොල් ඇතිරීම සඳහා ප්‍රමාණ දෙකක සමචතුරස්‍රාකාර පිඟන් ගඩොල් භාවිත කෙරෙයි. විශාල පිඟන් ගඩොලක වර්ගඵලය 900 cm^2 වේ.

A කාමරයේ ඇතිරීම සඳහා කුඩා පිඟන් ගඩොල් 100ක් සහ විශාල පිඟන් ගඩොල් 10 ක් ද, B කාමරය සඳහා කුඩා පිඟන් ගඩොල් 20ක් සහ විශාල පිඟන් ගඩොල් 30ක් ද අවශ්‍ය වේ. B කාමරයේ ගෙබිමේ වර්ගඵලය A කාමරයේ ගෙබිමේ වර්ගඵලයට විශාල හෝ සමාන නම්, අසමානතාවක් ඇසුරෙන් කුඩා පිඟන් ගඩොලක උපරිම පැත්තක දිග සොයන්න.

6. ටැංකියකට $5l$ ධාරිතාවක් ඇති විශාල බාල්දියකින් සහ තවත් කුඩා බාල්දියකින් වතුර පුරවනු ලැබේ. සම්පූර්ණයෙන් පුරවන ලද විශාල බාල්දියෙන් 12 වතාවක් ද සම්පූර්ණයෙන් ම පිරවූ කුඩා බාල්දියෙන් 4 වතාවක් ද වතුර දැමූවිට ටැංකිය සම්පූර්ණයෙන් පිරේ. විශාල බාල්දියෙන් 9 වතාවක් සහ කුඩා බාල්දියෙන් 9 වතාවක් වතුර දැමූවිට ටැංකිය උතුරා නොයයි. අසමානතාවක් ඇසුරෙන් කුඩා බාල්දියේ උපරිම ධාරිතාව ආසන්න ලීටරයට සොයන්න.

21 වෘත්ත චතුරස්‍ර

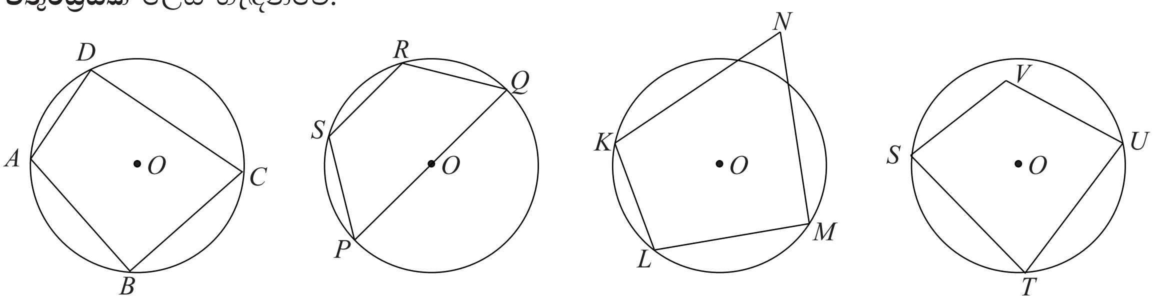
මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- වෘත්ත චතුරස්‍ර හඳුනා ගැනීමට හා වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ යන ප්‍රමේයය හා එහි විලෝමය හඳුනා ගැනීමට
- වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණය එහි අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ යන ප්‍රමේයය හඳුනා ගැනීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

21.1 වෘත්ත චතුරස්‍ර

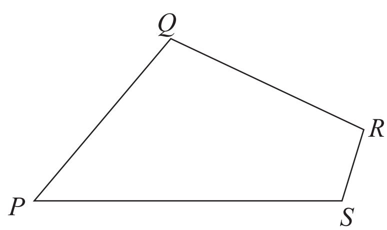
චතුරස්‍රයක ශීර්ෂ හතර එකම වෘත්තයක් මත පිහිටා ඇත්නම් එම චතුරස්‍රය **වෘත්ත චතුරස්‍රයක්** ලෙස හැඳින්වේ.



(i) (ii) (iii) (iii)

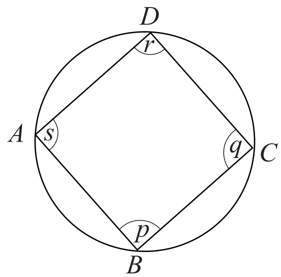
ඉහත රූපසටහන්වල දැක්වෙන පරිදි (i) හා (ii) රූප සටහන්වල දැක්වෙන $ABCD$ හා $PQRS$ චතුරස්‍ර **වෘත්ත චතුරස්‍ර** බවත් (iii) හා (iv) රූප සටහන්වල දැක්වෙන චතුරස්‍ර **වෘත්ත චතුරස්‍ර නොවන** බවත් පැහැදිලි ය.

චතුරස්‍රයක යම් කෝණයකට සම්මුඛ කෝණය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ඊට ඉදිරියෙන් ඇති කෝණයයි. නිදසුනක් ලෙස, පහත දැක්වෙන $PQRS$ චතුරස්‍රයේ $\hat{P}$ ට සම්මුඛ කෝණය $\hat{R}$ ද $\hat{Q}$ ට සම්මුඛ කෝණය $\hat{S}$ ද වේ.



වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ අතර ඇති සම්බන්ධය පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි නිරත වීමෙන් අවබෝධ කර ගනිමු.

ක්‍රියාකාරකම



- රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට වෘත්ත චතුරස්‍රයක් ඇඳ ගන්න.
- වෘත්ත චතුරස්‍රයේ කෝණ කපා වෙන් කරගන්න.
- එම වෙන්කර ගත් කෝණ, p හා r මගින් දැක්වෙන කෝණ යුගලය බද්ධ පාද යුගලයක් වන සේ කඩදාසියක අලවාගෙන ඒවා පරිපූරක දැයි (එනම් කෝණවල එකතුව 180° දැයි) මැන බලන්න. q හා s කෝණ යුගලය සඳහා ද එය සිදු කරන්න.
- එමගින් වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පිළිබඳ ව ඔබට එළඹිය හැකි නිගමනය කුමක් ද?

$p + r = 180^\circ$ ද $q + s = 180^\circ$ වන බව ඔබට පැහැදිලිවනු ඇත. මෙම සම්බන්ධය පහත ආකාරයට ප්‍රමේයයක් ලෙස ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

මෙම ප්‍රමේයය අනුව, ඉහත දී ඇති රූපය සැලකූ විට,

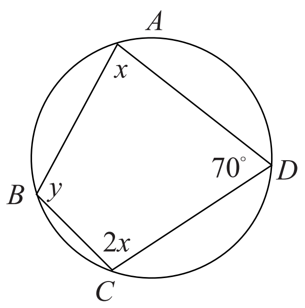
$$A\hat{B}C + C\hat{D}A = 180^\circ \text{ හා}$$

$$D\hat{C}B + D\hat{A}B = 180^\circ \text{ ද වේ.}$$

ඉහත සඳහන් කරන ලද ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් ගණනය කිරීම් කරන අයුරු විමසා බලමු.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයෙහි x හා y හි අගය සොයන්න.



වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක නිසා

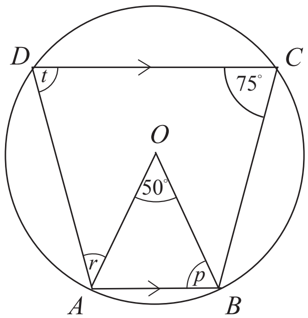
$$70^\circ + y = 180^\circ$$
$$\therefore \; y = 180^\circ - 70^\circ$$
$$\underline{\underline{y = 110^\circ}}$$

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක නිසා

$$x + 2x = 180^\circ$$
$$3x = 180^\circ$$
$$\therefore \; \underline{\underline{x = 60^\circ}}$$

නිදසුන 2

රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ $AB//DC$ වේ. වීජීය සංකේත මගින් දැක්වෙන කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න.



$O\hat{A}B = O\hat{B}A$ (OA හා OB එකම වෘත්තයේ අර නිසා සමාන වේ.)

$\therefore\ p + p + 50^\circ = 180^\circ$ (OAB ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණ)

$$\therefore p = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2}$$

$$= \underline{\underline{65^\circ}}$$

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$$75^\circ + D\hat{A}B = 180^\circ$$
$$D\hat{A}B = 180^\circ - 75^\circ$$
$$= 105^\circ$$

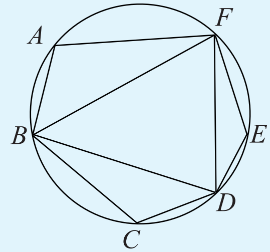
$$B\hat{A}O + O\hat{A}D = 105^\circ$$
$$\therefore\ 65^\circ + r = 105^\circ$$
$$r = 105^\circ - 65^\circ$$
$$r = \underline{\underline{40^\circ}}$$

මිත්‍ර කෝණ යුගලයක එකතුව 180° නිසා

$$t + 105^\circ = 180^\circ$$
$$\therefore\ t = 180^\circ - 105^\circ$$
$$t = \underline{\underline{75^\circ}}$$

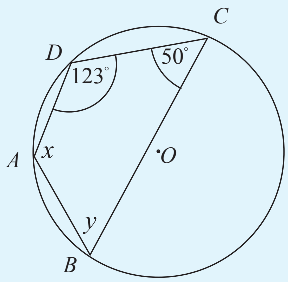
21.1 අභ්‍යාසය

1. (i) රූපයේ ඇති වෘත්ත චතුරස්‍ර සියල්ල ලියා දක්වන්න.
(ii) ඉහත නම් කරන ලද එක් එක් වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ යුගල දෙක ලියා දක්වන්න.

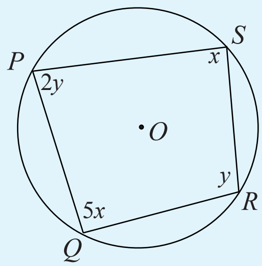


2. දී ඇති තොරතුරු උපයෝගී කරගෙන, සංකේත ඇසුරෙන් දැක්වෙන එක් එක් කෝණවල විශාලත්ව සොයන්න. පහත දැක්වෙන රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ අදාළ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි.

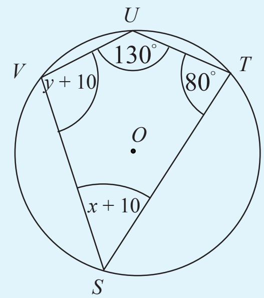
(i)



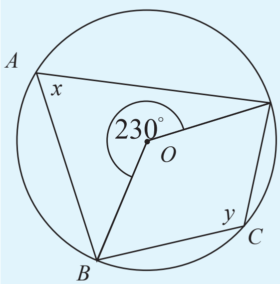
(ii)



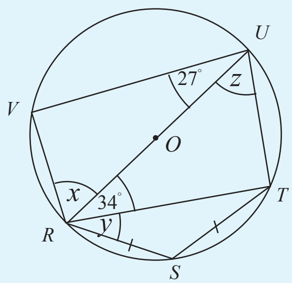
(iii)



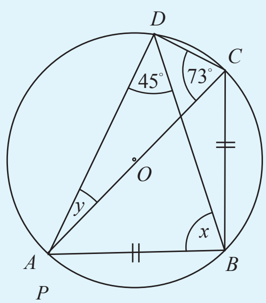
(iv)



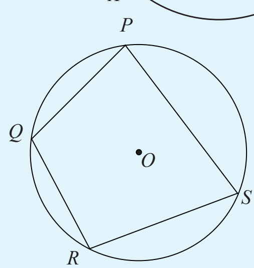
(v)



(vi)



3. රූපයේ දැක්වෙන්නේ O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකි.



a. $\hat{P} = 60^\circ, \hat{S} = 125^\circ$, නම් $\hat{R}$ හා $\hat{Q}$ හි අගය

b. $\hat{P} : \hat{R} = 2 : 3$ නම් $\hat{P}$ හා $\hat{R}$ හි අගය

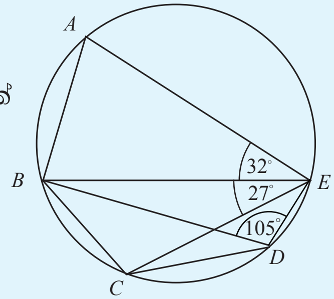
c. $\hat{Q} - \hat{S} = 120^\circ$ නම් $\hat{S}$ හා $\hat{Q}$ හි අගය

d. $2\hat{P} = \hat{R}$ නම් $\hat{P}$ හි අගය

e. $\hat{P} = 2x + y, \hat{Q} = x + y; \hat{R} = 60^\circ$ හා $\hat{S} = 90^\circ$ නම් x හා y හි අගය සොයන්න.

4. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ පරිධිය මත A, B, C, D, E හා F ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. $F\hat{A}B + B\hat{C}D + D\hat{E}F$ හි අගය සොයන්න.

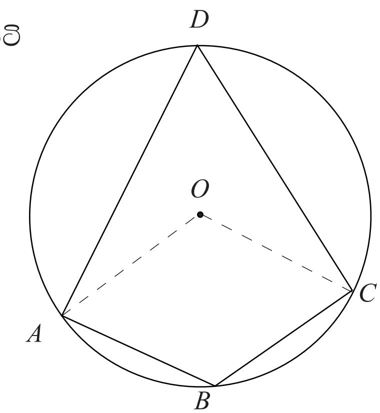
5. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ අගය සොයන්න.



a. $B\hat{A}E$ **b.** $C\hat{B}A$ **c.** $C\hat{B}E$

ඉහත සඳහන් කරන ලද "වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ" යන ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු අපි විමසා බලමු.

දත්තය: $ABCD$ යනු O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තය මත පිහිටි වෘත්ත චතුරස්‍රයකි.



සාධනය කළ යුත්ත: $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$ සහ

$D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$ බව

නිර්මාණය: OA හා OC යා කිරීම

සාධනය:

$A\hat{O}C = 2\,A\hat{D}C$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි)

$A\hat{O}C$ (පරාවර්තිත) $= 2\,A\hat{B}C$ (කේන්ද්‍රයේ ආපාතිත කෝණය වෘත්තය මත ආපාතිත කෝණය මෙන් දෙගුණයකි)

$\therefore\ A\hat{O}C + A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C$

නමුත්, $A\hat{O}C + A\hat{O}C$ (පරාවර්ත) $= 360^\circ$ (ලක්ෂ්‍යයක් වටා කෝණ)

$\therefore\ 2\,A\hat{D}C + 2\,A\hat{B}C = 360^\circ$

එවිට, $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^\circ$

මෙලෙසම, OB හා OD යා කර, $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$ බව පෙන්විය හැකි ය.

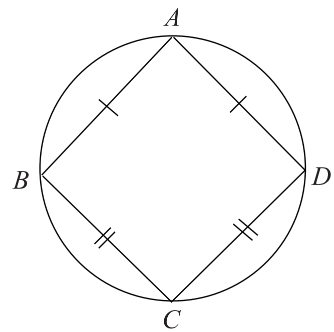
$\therefore$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ.

මෙම ප්‍රමේයයේ විලෝමය ද සත්‍ය වේ. එනම්, චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ දෙකක ඓක්‍යය 180° නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටයි. එය ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත ආකාරයට ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: චතුරස්‍රයක සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක නම් එම චතුරස්‍රයේ ශීර්ෂ වෘත්තයක් මත පිහිටයි.

ඉහත ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් අනුමේයයන් සාධනය කරන අයුරු දැන් විමසා බලමු.

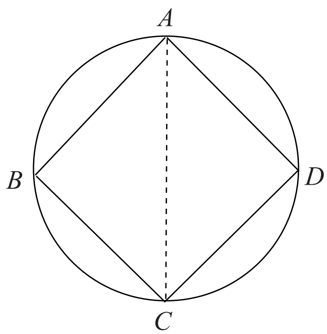
නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $AB = AD$ ද $CB = CD$ ද වේ.

(i) $ABC\Delta \equiv ACD\,\Delta$ බව පෙන්වන්න.

(ii) AC විෂ්කම්භයක් බව අපෝහනය කරන්න.



(i) ABC හා ADC ත්‍රිකෝණ යුගලය සැලකූ විට

$AB = AD$ (දී ඇත)

$BC = DC$ (දී ඇත)

AC පොදු පාදය

$\therefore\ ABC\Delta \equiv ACD\,\Delta$ (පා. පා. පා.)

(ii) $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ)

නමුත් $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^\circ$ (වෘත්ත චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ පරිපූරක වේ)

$\therefore\ A\hat{B}C + A\hat{B}C = 180^\circ$

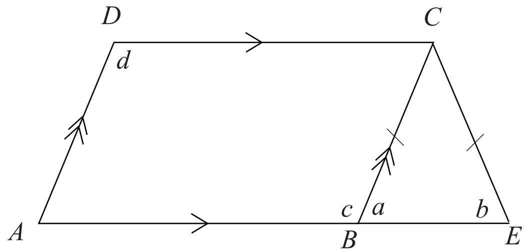
$\therefore\ 2\,A\hat{B}C = 180^\circ$

$\therefore\ A\hat{B}C = 90^\circ$

$\therefore\ AC$ විෂ්කම්භය වේ. (අර්ධ වෘත්තයේ කෝණය 90° බැවින්)

නිදසුන 2

ABCD සමාන්තරාස්‍රයේ *CB* = *CE* වන සේ *AB* පාදය *E* තෙක් දික්කර ඇත. *AECD* චතුරස්‍රය, වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



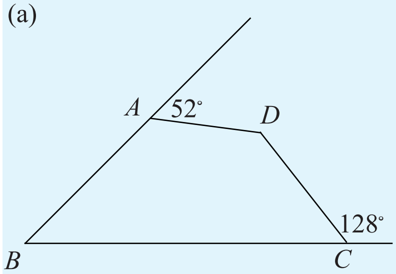
$a = b$ ($CE = CB$ නිසා)
$c = 180^\circ - a$ (සරල කෝණ)
$c = 180^\circ - b$ ($a = b$ නිසා) ——— ①
$c = d$ ($ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ) ——— ②
① හා ② ඇසුරෙන්
$d = 180^\circ - b$
$\therefore b + d = 180^\circ$

AECD චතුරස්‍රයේ සම්මුඛ කෝණ යුගලයේ එකතුව 180° බැවින් එම චතුරස්‍රය වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ.

21.2 අභ්‍යාසය

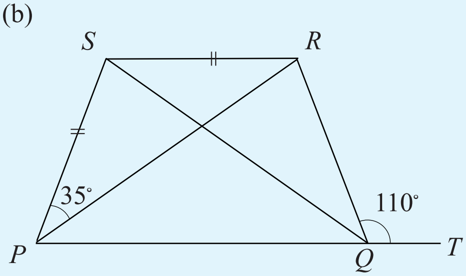
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් අවස්ථාවන් හි සඳහන් කර ඇති චතුරස්‍රය, වෘත්ත චතුරස්‍රයක් වේ ද නොවේ ද යන්න හේතු සහිත ව පැහැදිලි කරන්න.

(a)



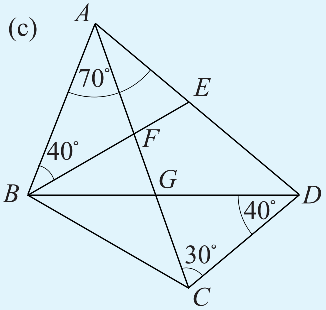
ABCD චතුරස්‍රය

(b)



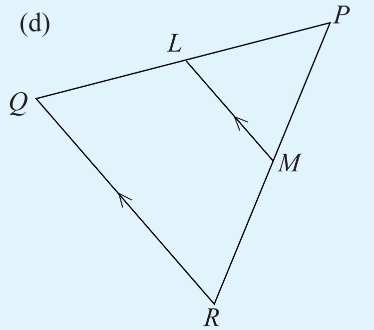
PQRS චතුරස්‍රය

(c)



FGDE චතුරස්‍රය

(d)



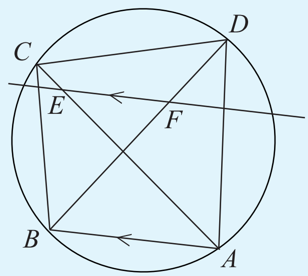
$PQ = PR$ නම් *QRML* චතුරස්‍රය

2. *PQRS* චතුරස්‍රයේ $\hat{P} = \hat{Q}$ ද $\hat{R} = \hat{S}$ ද වේ. *PQRS* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

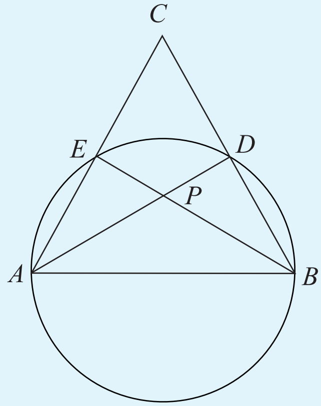
3. *ABCD* වෘත්ත චතුරස්‍රයේ *AC* යා කර ඇත. $B\hat{A}C = A\hat{D}C - A\hat{C}B$ බව පෙන්වන්න.

4. *ABCD* චතුරස්‍රයේ $A\hat{B}D + A\hat{D}B = D\hat{C}B$ වේ නම් *A, B, C* හා *D* ලක්ෂ්‍ය එකම වෘත්තයක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

5. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු ඇසුරෙන් *CDFE* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව සාධනය කරන්න.



6. දී ඇති රූපයේ *AB* විශ්කම්භයක් වේ නම්
(i) $A\hat{P}B = C\hat{A}B + A\hat{B}C$ බව පෙන්වන්න.
(ii) *CDPE* වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

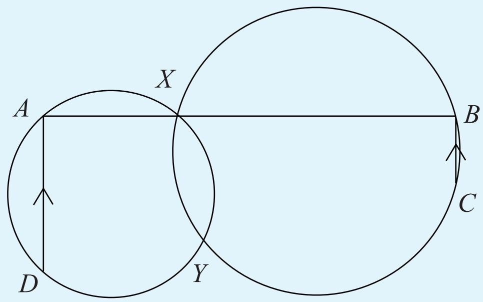


7. PQR ත්‍රිකෝණයේ PQ පාදය S දක්වා ද, PR පාදය T දක්වා ද දික්කර ඇත. $S\hat{Q}R$ හා $Q\hat{R}T$ කෝණවල සමච්ඡේදක X හි දී ද, $P\hat{Q}R$ හා $P\hat{R}Q$ කෝණවල සමච්ඡේදක Y හි දී ද එකනෙක හමු වේ.

(i) $QXRY$ යනු වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බවත් XY යනු විශ්කම්භයක් බවත් පෙන්වන්න.

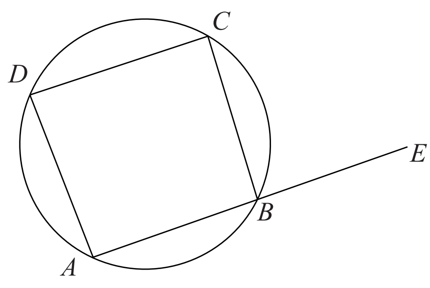
(ii) $Q\hat{P}R = 40^{\circ}$ නම් $Q\hat{X}R$ හි අගය සොයන්න.

8. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වෘත්ත දෙකක් X හා Y හි දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. X හරහා ඇඳි සරල රේඛාව A හා B හි දී වෘත්ත දෙක හමු වේ. D හා C ලක්ෂ්‍ය වෘත්ත දෙක මත පිහිටා ඇත්තේ AD හා BC සමාන්තර වන පරිදි නම් D, Y හා C ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය බව සාධනය කරන්න.

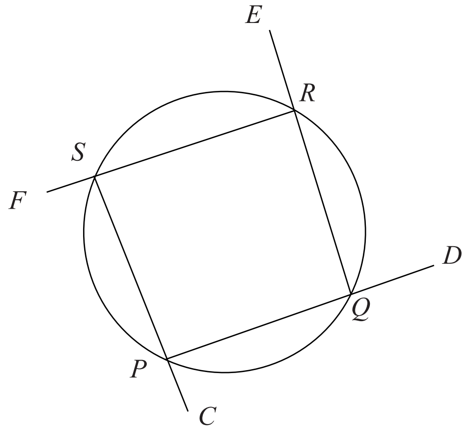


21.3 වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණ සහ අභ්‍යන්තර කෝණ අතර සම්බන්ධය

රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ AB පාදය E තෙක් දික්කර ඇත.



එවිට, $C\hat{B}E$ යන්න වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණයක් වේ. ඊට අදාළ අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය $A\hat{D}C$ වේ.

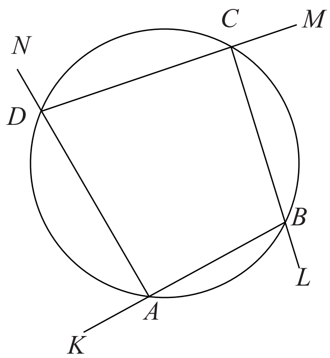


ඉහත රූපයේ දක්වා ඇති $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රය සැලකූ විට පහත වගුව සම්පූර්ණ කළ හැකි ය.

දික්කළ පාදය	බාහිර කෝණය	අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය
PQ	$D\hat{Q}R$	$P\hat{S}R$
QR	$E\hat{R}S$	$Q\hat{P}S$
RS	$F\hat{S}P$	$P\hat{Q}R$
SP	$Q\hat{P}C$	$Q\hat{R}S$

වෘත්ත චතුරස්‍රයක බාහිර කෝණයක් හා ඊට අදාළ අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය අතර සම්බන්ධය පහත ප්‍රමේයයෙන් ප්‍රකාශ වේ.

ප්‍රමේයය:
වෘත්ත චතුරස්‍රයක පාදයක් දික් කිරීමෙන් සෑදෙන බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන වේ.



මෙම ප්‍රමේයයට අනුව, ඉහත රූප සටහනට අදාළ ව, පහත දැක්වෙන සමානතා පවතී.

$$D\hat{A}K = B\hat{C}D$$

$$A\hat{B}L = C\hat{D}A$$

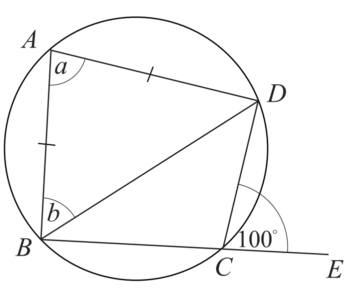
$$B\hat{C}M = B\hat{A}D$$

$$C\hat{D}N = A\hat{B}C \text{ වේ.}$$

මෙම ප්‍රමේයය සත්‍යවන්නේ ඇයි දැයි යන්න විමසා බලමු. නිදසුනක් ලෙස, ඉහත රූපයේ, $D\hat{A}B$ හා $B\hat{C}M$ කෝණ සමාන වීමට හේතුව විමසා බලමු. $ABCD$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් නිසා, $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180^\circ$ වේ. එසේම, DCM සරල රේඛාවක් නිසා $D\hat{A}B + B\hat{C}D = B\hat{C}D + B\hat{C}M$. දෙපසින් ම $B\hat{C}D$ අවලංගු කළ විට, $D\hat{A}B = B\hat{C}M$ ලෙස ලැබේ.

නිදසුන 1

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන a හා b හි අගය සොයන්න.



වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා

$a = \underline{\underline{100^\circ}}$

$A\hat{D}B = b$ ($AB = AD$ නිසා)

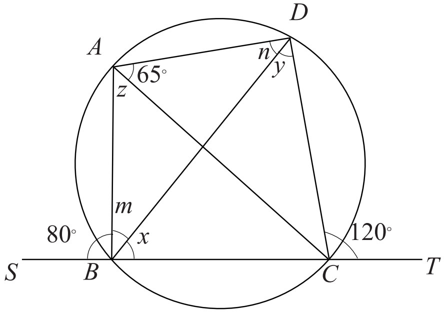
$a + b + b = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ)

$100^\circ + 2b = 180^\circ$

$b = \underline{\underline{40^\circ}}$

නිදසුන 2

දී ඇති රූපයේ දැක්වෙන x, y, z, n හා m හි අගය සොයන්න.



$x = 65^\circ$ (එකම ඛණ්ඩයේ කෝණ)

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා

$$B\hat{A}D = D\hat{C}T$$

$$B\hat{A}D = 120^\circ$$

$$z + 65^\circ = 120^\circ$$

$$z = 55^\circ$$

$z = y$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ)

$$\therefore \; y = \underline{\underline{55^\circ}}$$

වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණයට සමාන නිසා

$$A\hat{D}C = A\hat{B}S = 80^\circ$$

$$\therefore \; n + y = 80^\circ$$

$$n + 55^\circ = 80^\circ$$

$$n = 80^\circ - 55^\circ$$

$$\therefore \; n = \underline{\underline{25^\circ}}$$

$80^\circ + m + x = 180^\circ$ (සරල කෝණ)

$$80^\circ + m + 65^\circ = 180^\circ$$

$$m = 180^\circ - 145^\circ$$

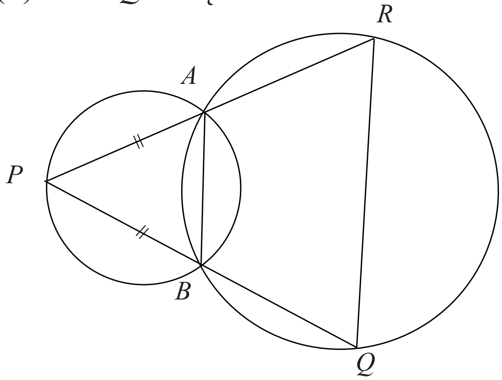
$$m = \underline{\underline{35^\circ}}$$

නිදසුන 3

රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙක A හා B හි දී ඡේදනය වන අතර $PA = PB$ වේ.
$A\hat{P}B = 70^\circ$ නම්,

(i) $A\hat{R}Q$ හි අගය සොයන්න.

(ii) $AB//RQ$ වේ ද?



(i) APB ත්‍රිකෝණයේ

$P\hat{A}B = P\hat{B}A$ ($PA = PB$ නිසා)

$\therefore \quad P\hat{A}B = P\hat{B}A = \dfrac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$

තව ද $A\hat{B}P = A\hat{R}Q$ ($ABQR$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ බාහිර කෝණය = අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය)

$\therefore \quad A\hat{R}Q = \underline{\underline{55^\circ}}$

(ii) $P\hat{A}B = A\hat{R}Q = 55^\circ$ වේ.

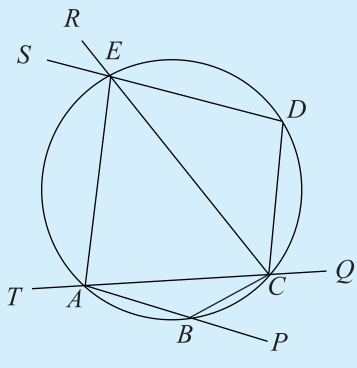
$\therefore \quad AB//RQ$ වේ. (අනුරූප කෝණ සමාන වන නිසා)

21.3 අභ්‍යාසය

1. රූපය ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් කෝණයට සමාන වෙනත් කෝණයක් නම් කරන්න.

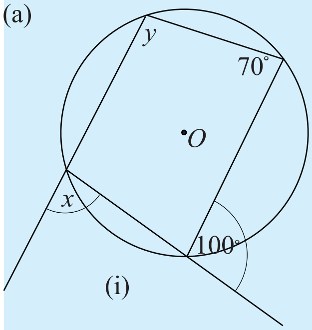
(i) $C\hat{B}P$ (ii) $D\hat{C}Q$ (iii) $R\hat{E}A$

(iv) $S\hat{E}A$ (v) $E\hat{A}T$

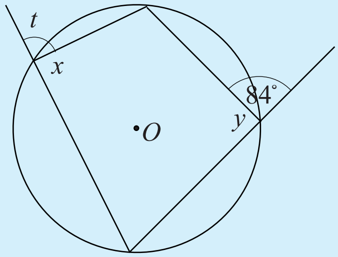


2. පහත දැක්වෙන රූපවල O ලෙස නම් කර ඇත්තේ අදාළ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රයයි. වීජීය සංකේත මගින් දැක්වෙන එක් එක් කෝණයේ විශාලත්වය සොයන්න.

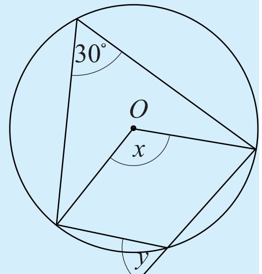
(a)



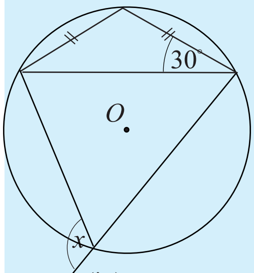
(i)



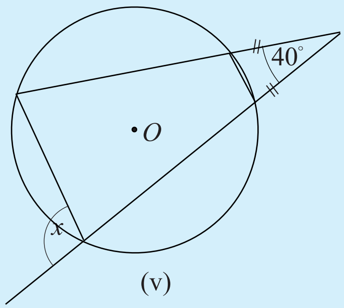
(ii)



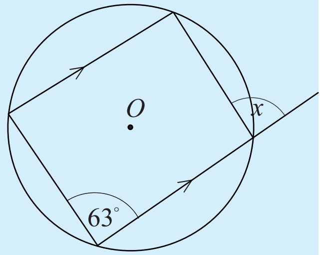
(iii)



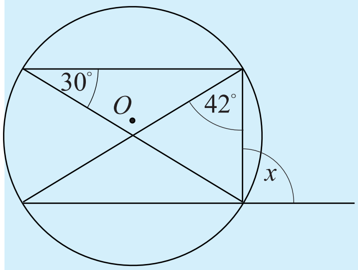
(iv)



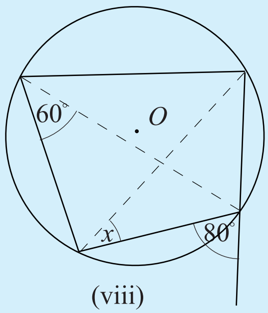
(v)



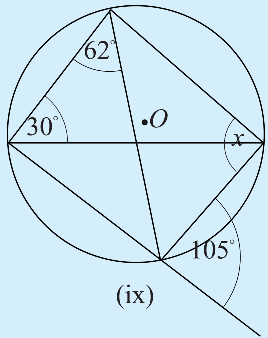
(vi)



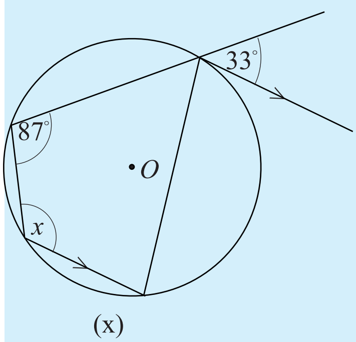
(vii)



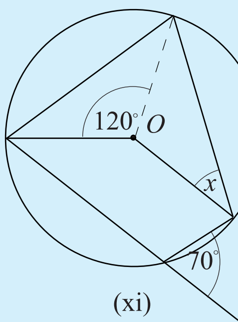
(viii)



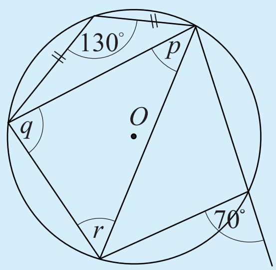
(ix)



(x)

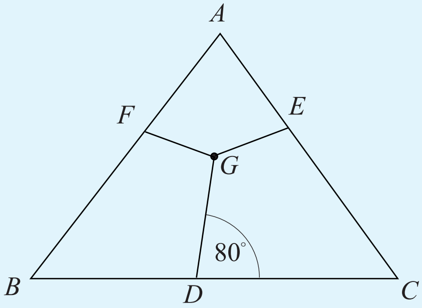


(xi)



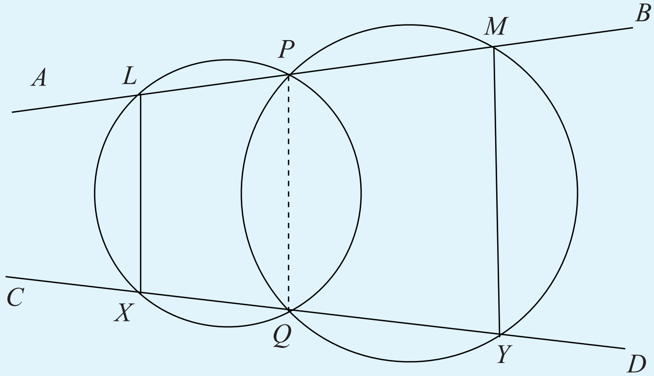
(xii)

3. ABC ත්‍රිකෝණයේ BC, CA හා AB පාදමත පිළිවෙළින් D, E, F ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත්තේ $BDGF$ හා $DCEG$ වෘත්ත චතුරස්‍ර වන පරිදි හා $G\hat{D}C = 80^\circ$ වන පරිදි නම්



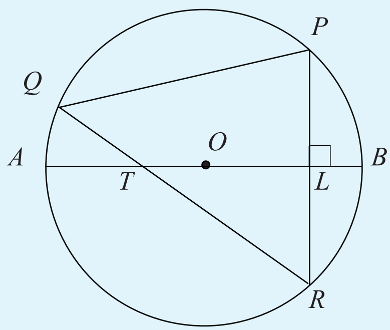
(i) $A\hat{F}G$ හා $A\hat{E}G$ හි අගයන් සොයන්න.
(ii) $AFGE$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

4. රූපයේ දී ඇති වෘත්ත P හා Q හි දී ඡේදනය වේ. APB හා CQD සරල රේඛා, වෘත්ත L,M හා X, Y වලදී පිළිවෙළින් හමුවේ.



(i) $A\hat{L}X = 105^\circ$ නම් $B\hat{M}Y$ හි අගය සොයන්න.
(ii) LX හා MY සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

5. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O වන අතර AB විෂ්කම්භය හා PR ජ්‍යාය එකිනෙක L හි දී ලම්බකව ඡේදනය වේ. QR හා AB රේඛා ඛණ්ඩ T හි දී ඡේදනය වේ.



a. $Q\hat{T}A = x$ නම් x ඇසුරෙන්
   (i) $L\hat{R}T$ හි අගය
   (ii) $O\hat{P}Q$ හි අගය
   ලියන්න.

b. $QTOP$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

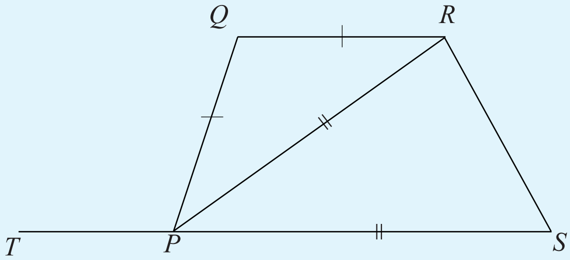
6. දී ඇති රූපයේ $PQ = QR$ ද $PR = PS$ ද වේ.

$P\hat{R}S = 2\, Q\hat{R}P$ නම්,

(i) $PSRQ$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව

(ii) $Q\hat{P}T : P\hat{R}S = 3 : 2$ බව

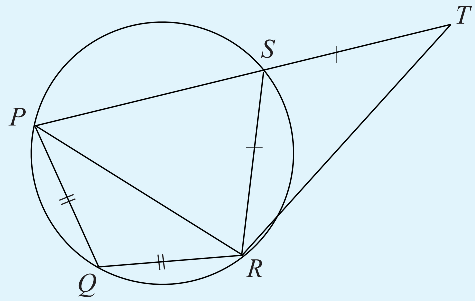
පෙන්වන්න.



7. $PQRS$ වෘත්ත චතුරස්‍රයේ $PQ = QR$ වේ. $RS = ST$ වන පරිදි PS පාදය T දක්වා දික්කර ඇත. $S\hat{R}T = 32^\circ$ වේ නම්

(i) $Q\hat{R}P$ හි අගය සොයන්න.

(ii) QS හා RT පාද සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.



22

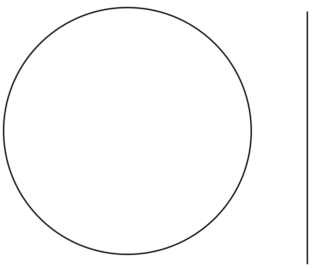
ස්පර්ශක

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

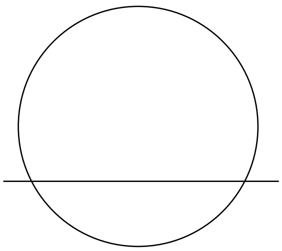
- වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
- බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට අඳින ලද ස්පර්ශක හා ඒවායේ ලක්ෂණ හඳුනා ගැනීමට
- ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ හඳුනා ගැනීමට හා ඒ සම්බන්ධ ගැටලු විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

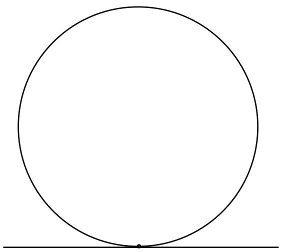
22.1 ස්පර්ශක



(i) රූපය



(ii) රූපය



(ii) රූපය

(i) රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට හා සරල රේඛාවට පොදු වූ ලක්ෂ්‍ය නොමැත. එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි.

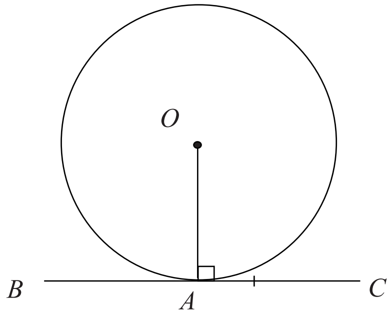
(ii) රූපයේ සරල රේඛාවෙන් වෘත්තය ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය වේ. සරල රේඛාවට සහ වෘත්තයට පොදු ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ඇත. එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයේ ඡේදකයක් ලෙස හැඳින්වේ.

(iii) රූපයේ ඇති සරල රේඛාවට සහ වෘත්තයට එක් පොදු ලක්ෂ්‍යයක් පමණක් ඇත. මෙවිට සරල රේඛාව වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි යැයි කියනු ලබන අතර එවිට සරල රේඛාව වෘත්තයේ "**ස්පර්ශකයක්**" ලෙස හැඳින්වේ.

ස්පර්ශකයට හා වෘත්තයට පොදු ලක්ෂ්‍යය **ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යය** ලෙස හැඳින්වේ.

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අරයට ලම්බව අඳින ලද රේඛාව

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අරයට ලම්බ ව අඳින ලද රේඛාව පිළිබඳ ව කරුණු ඉගෙන ගැනීම සඳහා පහත කරුණු කෙරෙහි ඔබේ අවධානය යොමු කරන්න.



ඉහත රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය OA වේ. OAට ලම්බ වන පරිදි A හි දී ඇඳි ලම්බකය BC වේ. මෙහි BC රේඛාව වෘත්තය හමුවන්නේ A ලක්ෂ්‍යයේ දී පමණි. BC රේඛා ඛණ්ඩය A හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන බව ද පැහැදිලි ය.

එනම්,

වෘත්තය මත වූ A ලක්ෂ්‍යයේ දී OA අරයට ලම්බව A හි දී ඇඳි රේඛා ඛණ්ඩය වන BC මෙම වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ. මෙම ප්‍රතිඵලය ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයය: වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.

තව ද, වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වන සේ ම මෙහි විලෝමය ද සත්‍ය වේ.

එනම්,

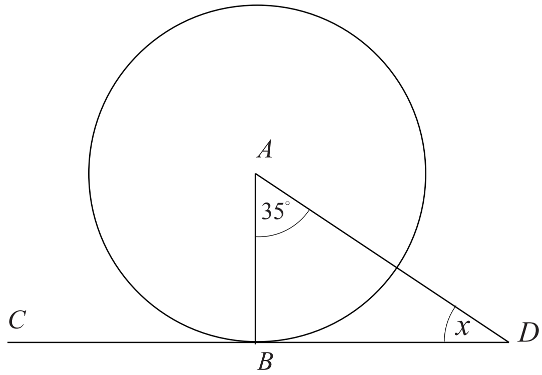
වෘත්තය මත ඕනෑ ම ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් ඇඳ, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී අරය ද ඇඳි විට, එම ස්පර්ශකය හා අරය එකිනෙක ලම්බ වේ.

එම ප්‍රතිඵලය ද ප්‍රමේයයක් ලෙස මෙසේ ඉදිරිපත් කළ හැකි ය.

ප්‍රමේයයේ විලෝමය : වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, එම ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරයට ලම්බ වේ.

නිදසුන 1

කේන්ද්‍රය A වන වෘත්තයට ඒ මත පිහිටි B හි දී ඇඳි ස්පර්ශකය CD වේ. $B\hat{A}D = 35^\circ$ නම් x හි අගය සොයන්න.

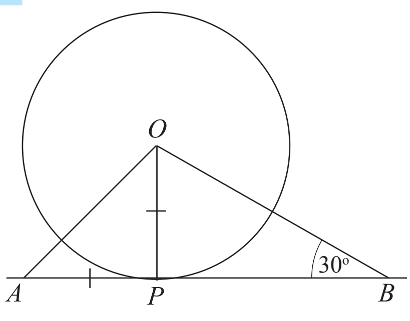


$A\hat{B}D = 90^\circ$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$$35^\circ + 90^\circ + x = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 35^\circ - 90^\circ$$
$$\underline{\underline{x = 55^\circ}}$$

නිදසුන 2



රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $OP = AP$ සහ $O\hat{B}P = 30^\circ$ නම් $A\hat{O}B$ අගය සොයන්න.

$O\hat{P}A = 90^\circ$ (වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා)

$OP = AP$ (දී ඇත)

$\therefore P\hat{O}A = P\hat{A}O$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක සමාන පාදවලට සම්මුඛ කෝණ සමාන නිසා)

APO ත්‍රිකෝණයෙහි,

$P\hat{A}O + P\hat{O}A + O\hat{P}A = 180^o$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180^o නිසා)

$\therefore \; P\hat{A}O + P\hat{O}A + 90^o = 180^o$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 180^o - 90^o$

$P\hat{A}O + P\hat{O}A = 90^o$

$\therefore 2\,P\hat{A}O = 90^o$ ($P\hat{A}O = P\hat{O}A$ නිසා)

$P\hat{A}O = \dfrac{90^o}{2}$

$= 45^o$

AOB ත්‍රිකෝණයෙහි,

$A\hat{O}B + P\hat{A}O + P\hat{B}O = 180^o$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180^o නිසා)

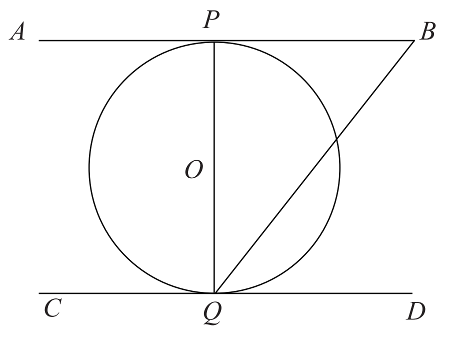
$A\hat{O}B + 45^o + 30^o = 180^o$

$A\hat{O}B + 75^o = 180^o$

$A\hat{O}B = 180^o - 75^o$

$= \underline{\underline{105^o}}$

නිදසුන 3



PQ යනු O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ විෂ්කම්භයකි. වෘත්තයට P හා Q හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB සහ CD වේ. $P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ බව පෙන්වන්න.

වෘත්තයක් මත ලක්ෂ්‍යයක දී අඳින ලද ස්පර්ශකය, ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ඔස්සේ ඇඳි අරයට ලම්බ වන නිසා,

$Q\hat{P}B = 90^o$ හා

$P\hat{Q}D = 90^o$ වේ.

$\therefore \; Q\hat{P}B + P\hat{Q}D = 90^o + 90^o$

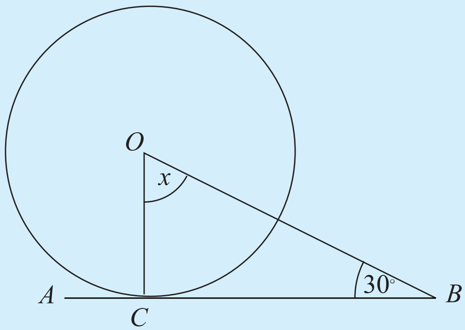
$= 180^o$

$\therefore \; AB // CD$ (මිත්‍රකෝණ පරිපූරක නිසා)

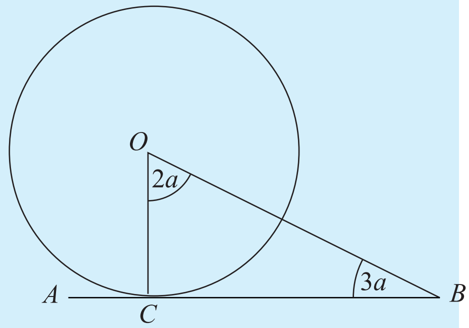
$\therefore \; P\hat{B}Q = B\hat{Q}D$ ($AB // CD$ සහ ඒකාන්තර කෝණ)

22.1 අභ්‍යාසය

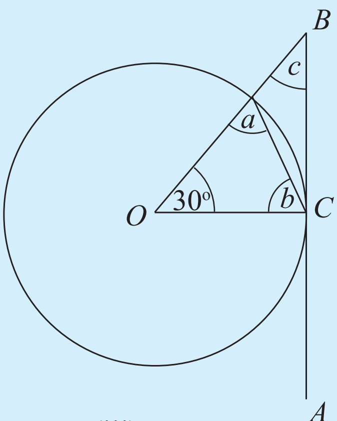
1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද AB යනු වෘත්තය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය ද වේ. දී ඇති දත්ත අනුව, වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.



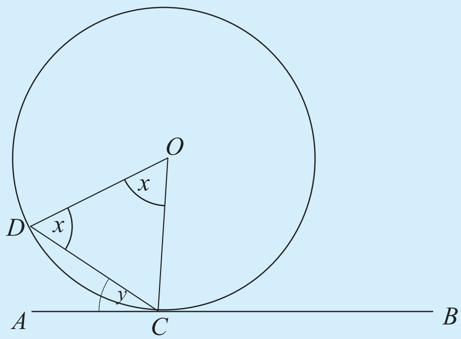
(i)



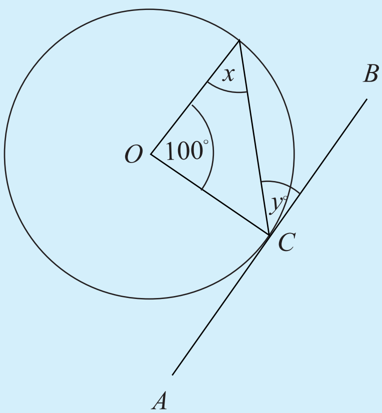
(ii)



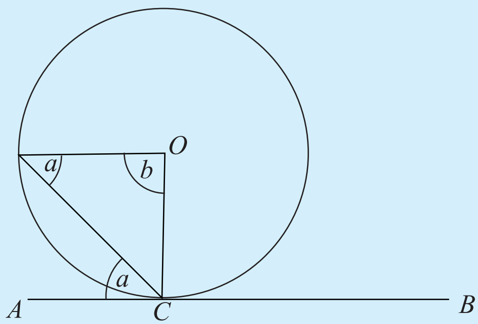
(iii)



(iv)

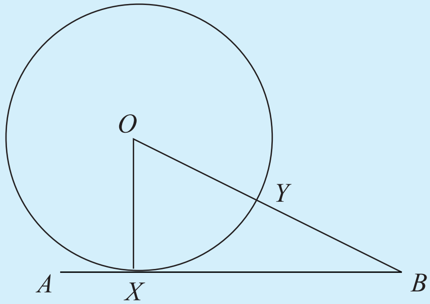


(v)

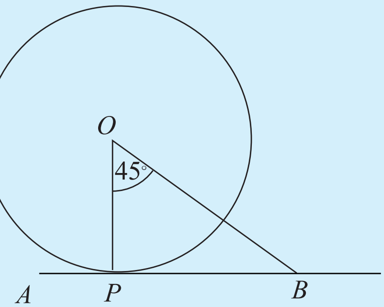


(vi)

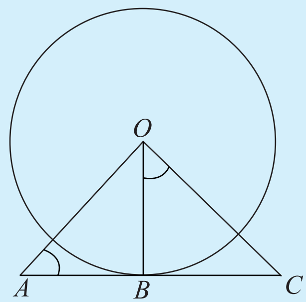
2. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. වෘත්තයේ අරය 6 cm ද $YB = 4$ cm ද නම් XB හි දිග සොයන්න.



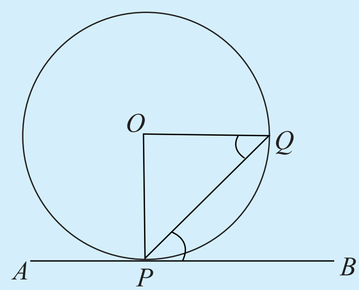
3. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB ද $B\hat{O}P = 45^\circ$ ද $PB = 6$ cm ද නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



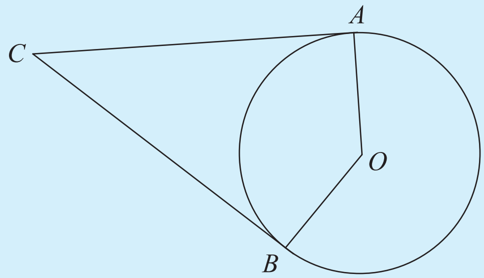
4. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට B හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AC වේ. $O\hat{A}B = B\hat{O}C$ නම් $A\hat{O}B = B\hat{C}O$ බව පෙන්වන්න.



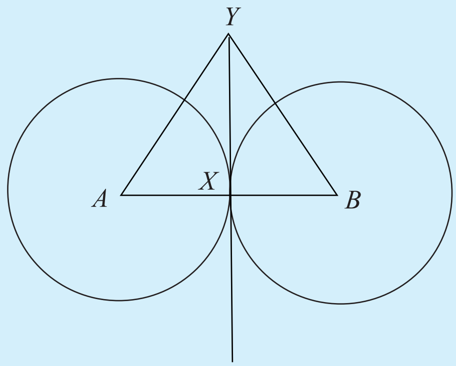
5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ වන ලෙස Q ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත පිහිටයි. OQ හා PO එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.



6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ B ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක C ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. $AOBC$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



7. රූපයේ දැක්වෙන්නේ අර සමාන වූ ද කේන්ද්‍ර A හා B වූ ද වෘත්ත දෙකකි. Y ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $AY = YB$ වන පරිදි ය. YX රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.

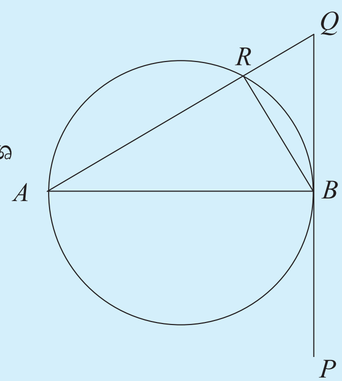


8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ AB විශ්කම්භයක් වන අතර PQ රේඛාව B ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $Q\hat{R}B = 90^\circ$ බව

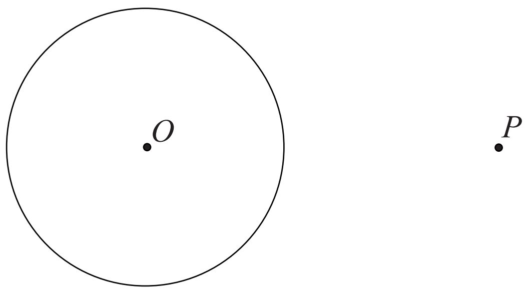
(ii) $A\hat{B}R = R\hat{Q}B$ බව

පෙන්වන්න.

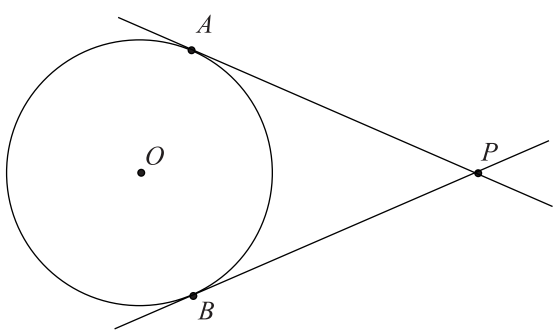


22.2 බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශක

O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි P ලක්ෂ්‍යයක් සලකමු.

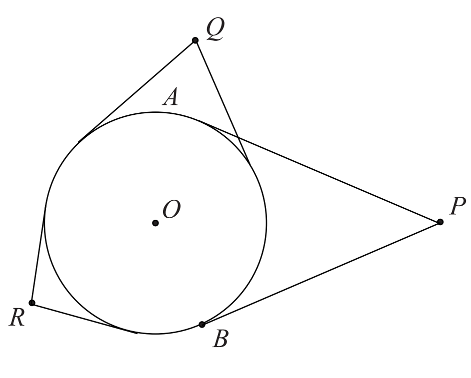


මෙම P ලක්ෂ්‍යය හරහා ගමන් කරමින් වෘත්තය ස්පර්ශ කරන රේඛා දෙකක් ඇඳිය හැකි ය. එසේ ඇඳ ඇති රේඛා දෙක පහත රූපයේ දැක්වේ.



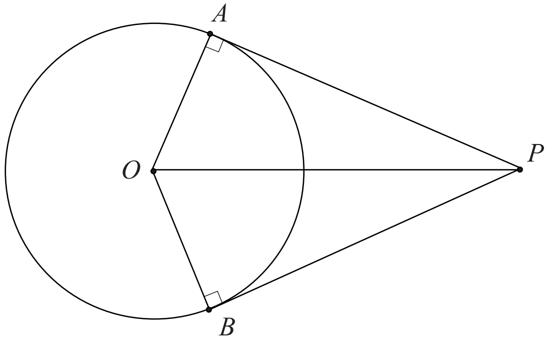
මෙම ස්පර්ශක දෙකට, P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක යැයි කියනු ලැබේ.

P ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් කොතැනක පිහිටියත් මෙවැනි ස්පර්ශක යුගලයක් ඇඳිය හැකි බව අවබෝධ කර ගන්න. පහත රූපයේ දැක්වෙන්නේ P, Q හා R ලක්ෂ්‍ය තුනක් හරහා ඇඳ ඇති ස්පර්ශක යුගල තුනකි.



බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට මෙසේ ස්පර්ශක යුගලක් ඇඳි විට ලැබෙන රූපයෙහි ජ්‍යාමිතික ලක්ෂණ පිළිබඳ ව දැන් විමසා බලමු.

ස්පර්ශක ලක්ෂ්‍ය දෙක A හා B ලෙස ලකුණු කොට, OA හා OB අරත්, OP රේඛා ඛණ්ඩයත් අඳිමු.



ඉහත 22.1 කොටසේ දී උගත් පරිදි, ස්පර්ශකය හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අරය එකිනෙකට ලම්බ නිසා ඒ බව රූපයේ ලකුණු කොට ඇත.

මෙම රූපයේ ඇති OAP හා OBP ත්‍රිකෝණ දෙක දෙස බැලූ සැනින්, සමමිතිය අනුව, ඒවා අංගසම බව අපට අනුමාන කළ හැකි ය. ඇත්ත වශයෙන් ම ඒවා අංගසම වේ. ඒ බව පහසුවෙන් සාධනය කළ හැකි ය. එම සාධනය කරන ආකාරය පිළිබඳ වැටහීමක් ලබා ගනිමු. ඒ සඳහා, එම ත්‍රිකෝණ දෙක ම සෘජුකෝණික බව පළමු ව නිරීක්ෂණය කරන්න. ඒ අනුව, එක් ත්‍රිකෝණයක කර්ණය හා තවත් පාදයක්, අනෙක් ත්‍රිකෝණයේ කර්ණයට හා තවත් පාදයකට සමාන බව පෙන්වීමෙන්, කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ එම සාධනය සිදු කළ හැකි ය. ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි ම කර්ණය වන්නේ OP පොදු පාදයයි. තව ද OA හා OB අර නිසා එම පාද ද සමාන වේ. මේ අනුව ත්‍රිකෝණ දෙක කර්ණ පා. අවස්ථාව යටතේ අංගසම වේ. එසේ අංගසම වූ පසු, අනුරූප අංග සමාන වන නිසා,

(i) $AP = BP$ වේ; එනම් ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ වේ; එනම් මගින් ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේද වේ.

(iii) $A\hat{O}P = B\hat{O}P$ වේ; එනම් ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයෙහි සමාන කෝණ ආපාතනය කෙරෙයි.

මෙම සාකච්ඡා කළ කරුණු, ප්‍රමේයයක් ලෙස පහත දැක්වේ.

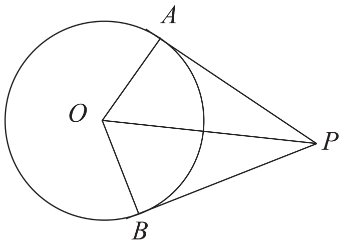
ප්‍රමේයය : බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් අඳිනු ලැබේ නම්.

(i) ස්පර්ශක දෙක දිගින් සමාන වේ.

(ii) බාහිර ලක්ෂ්‍යය හා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.

(iii) ස්පර්ශක මගින් කේන්ද්‍රයේ සමාන කෝණ ආපාතනය කරයි.

මෙම ප්‍රමේයය විධිමත් ව සාධනය කරන අයුරු විමසා බලමු.



දත්තය : O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P බාහිර ලක්ෂ්‍යයේ සිට A හා B හිදී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AP සහ BP වේ.

සාධනය කළ යුත්ත :

(i) $AP = BP$ බව

(ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$ බව

(iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$ බව

සාධනය : $O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^{o}$ (ස්පර්ශක අරයට ලම්බ වන නිසා)

$\therefore$ POA සහ POB ත්‍රිකෝණ. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ.

දැන් POA සහ POB ත්‍රිකෝණවල

$OA = OB$ (එකම වෘත්තයේ අර)

OP පොදු පාදය

$\therefore$ $POA\,\Delta \equiv POB\Delta$ (කර්ණ පා.)

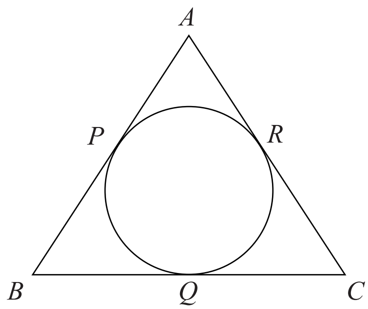
අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග සමාන වේ.

$\therefore$ (i) $AP = BP$

$\therefore$ (ii) $A\hat{P}O = B\hat{P}O$

$\therefore$ (iii) $P\hat{O}A = P\hat{O}B$

නිදසුන 1



රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පාද *P*, *Q* සහ *R* ලක්ෂ්‍යවල දී ස්පර්ශ කෙරේ. $AB = 11$ cm සහ $CR = 4$ cm නම් *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ ඇති විට ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.

$\therefore$ $AP = AR$ ද
$BP = BQ$ ද
$CR = CQ$ ද වේ.

ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය $= AB + BC + CA$

$= 11 + (BQ + QC) + (CR + RA)$

$= 11 + (BP + CR) + (CR + AP)$

$= 11 + (BP + 4) + (4 + AP)$

$= 19 + (BP + AP)$

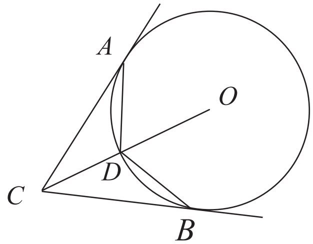
$= 19 + AB$

$= 19 + 11$

$= 30$

$\therefore$ *ABC* ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 30 cm වේ.

නිදසුන 2

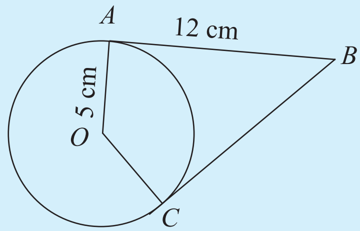


රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට බාහිරින් පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇඳි ස්පර්ශක A සහ B ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කෙරේ. වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය වන O සහ C යා කෙරෙන සරල රේඛාව D හිදී වෘත්තය ඡේදනය කෙරේ. $AD = BD$ බව පෙන්වන්න.

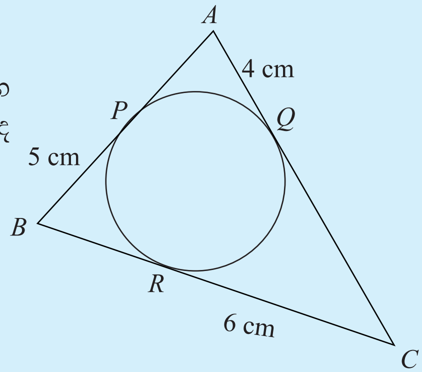
ACD හා BCD ත්‍රිකෝණ දෙක අංගසම කිරීමෙන් අවශ්‍ය ප්‍රතිඵලය සාධනය කළ හැකි ය.
ACD සහ BCD ත්‍රිකෝණවල
$AC = BC$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම් ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)
$A\hat{C}O = B\hat{C}O$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශක දෙකක් ඇඳ තිබේ නම් බාහිර ලක්ෂ්‍යයත් කේන්ද්‍රයත් යා කරන සරල රේඛාවෙන් ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය වේ)
CD පොදු පාදය
$\therefore\ ACD\Delta \equiv BCD\Delta$ (පා.කෝ.පා.)
$\therefore\ \underline{\underline{AD = BD}}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණ දෙකක අනුරූප පාද සමාන නිසා)

22.2 අභ්‍යාසය

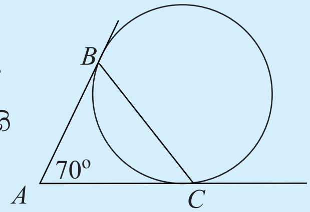
1. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක B හි දී හමු වේ. වෘත්තයේ අරය 5 cm ද AB = 12 cm ද නම් $ABCO$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.



2. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි P, Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB, AC සහ BC වේ. RC = 6 cm ද BP = 5 cm ද AQ = 4 cm ද නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.

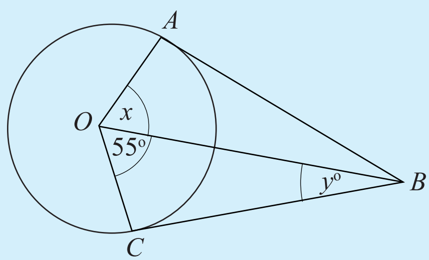


3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි B සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක A හි දී ඡේදනය වේ. $B\hat{A}C = 70^{o}$ නම් $A\hat{B}C$ හි අගය සොයන්න.

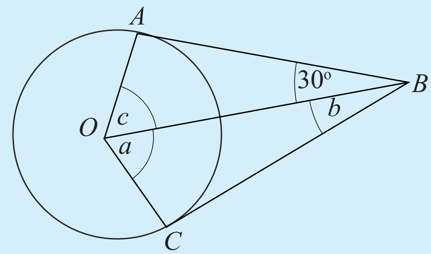


4. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද වෘත්ත මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක හමුවන ලක්ෂ්‍ය B ද වේ. දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන්, වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

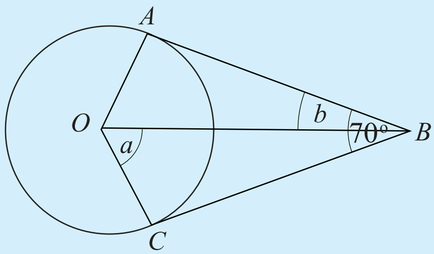
(i)



(ii)

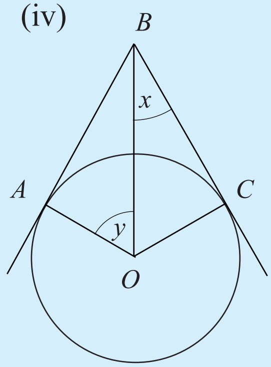


(iii)



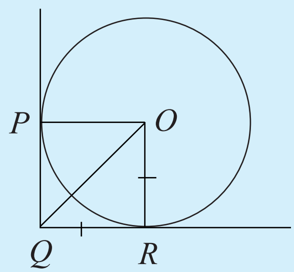
$A\hat{B}C = 70^\circ$

(iv)



$A\hat{O}C = 110^\circ$

5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක Q හිදී හමුවේ. $QR = OR$ නම්, $PQRO$ යන්න සමචතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

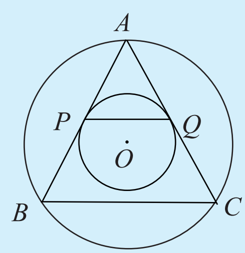


6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ විශාල වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. වෘත්තය තුළ පිහිටි කුඩා වෘත්තය P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල දී AB හා AC ස්පර්ශ කරයි.

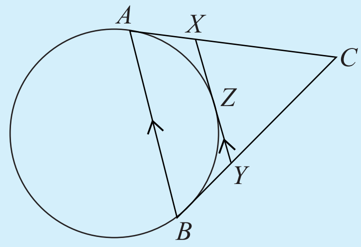
(i) APQ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

(ii) $BC \parallel PQ$ බව

පෙන්වන්න.



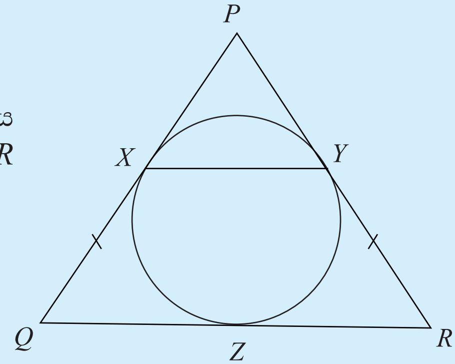
7. දී ඇති වෘත්තයට A, B හා Z හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AC, BC හා XY වේ. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $XC = CY$ බව පෙන්වන්න.



8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට P සිට අඳින ලද ස්පර්ශක X හා Y ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $XQ = YR$ වන සේ අඳින ලද QR සරල රේඛාව Z හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PR = PQ$ බව
(ii) $QR = XQ + YR$ බව
(iii) $XY \mathbin{//} QR$ බව

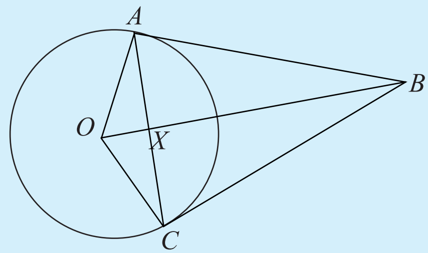
පෙන්වන්න.



9. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක B හිදී එකිනෙක හමුවේ.

(i) $OAX\,\Delta \equiv OCX\,\Delta$ බව
(ii) OB රේඛාව AC රේඛාවේ ලම්බ සමච්ඡේදකය බව
(iii) $A\hat{O}C = 2\,A\hat{C}B$ බව

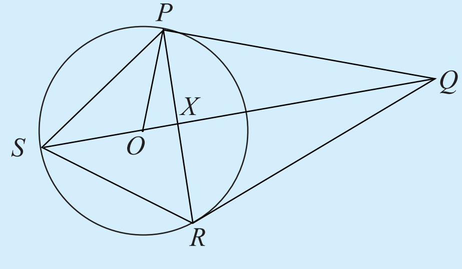
පෙන්වන්න.



10. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට Q සිට ඇඳි ස්පර්ශක PQ සහ QR වේ. දික් කරන ලද QO රේඛාවට S හි දී වෘත්තය හමුවේ.

(i) $PQS\,\Delta \equiv QRS\,\Delta$ බව
(ii) $2\,O\hat{P}X = P\hat{Q}R$ බව

පෙන්වන්න.

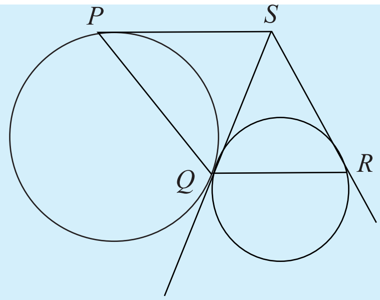


11. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකම මත Q ලක්ෂ්‍යය පිහිටන අතර QS රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වේ. S සිට වෘත්ත දෙකට අඳින ලද අනෙක් ස්පර්ශක දෙක P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PS = SR$ බව

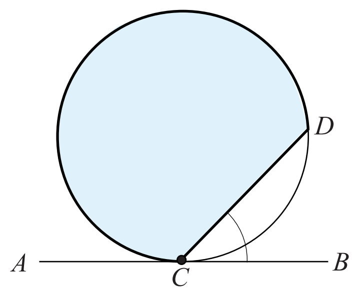
(ii) $P\hat{Q}R = S\hat{P}Q + S\hat{R}Q$ බව

පෙන්වන්න.



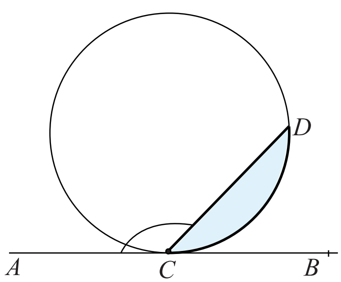
22.3 ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ

මුලින් ම ඒකාන්තර ඛණ්ඩය යන්නෙන් අදහස් වන්නේ කුමක් දැයි විමසා බලමු. ඒ සඳහා පහත රූප සටහන වෙත අවධානය යොමු කරන්න.



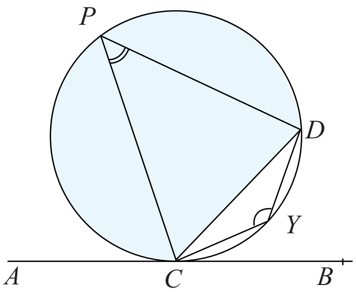
රූප සටහනේ දක්වා ඇති පරිදි AB සරල රේඛාව C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. CD ජ්‍යායකි. CD ජ්‍යායෙන්, වෘත්තය, වෘත්ත ඛණ්ඩ දෙකකට වෙන් වේ. එක් ඛණ්ඩයක් වන්නේ රූපයේ ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කොට දක්වා ඇති කොටසයි. අනෙක් ඛණ්ඩය වන්නේ එසේ අඳුරු නොකළ කුඩා කොටසයි. AB ස්පර්ශක මත CD ජ්‍යායෙන් කෝණ දෙකක් සාදයි. එක් කෝණයක් $A\hat{C}D$ ය. අනෙක $B\hat{C}D$ ය. BCD කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කොට ඇති වෘත්ත ඛණ්ඩයයි. එසේ ම, $A\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලෙස හැඳින්වෙන්නේ අඳුරු නොකළ අනෙක් වෘත්ත ඛණ්ඩයයි.

පහත දැක්වෙන රූප සටහනේ $A\hat{C}D$ කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය ලා නිල් පැහැයෙන් අඳුරු කර දක්වා ඇත.



ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ ආශ්‍රිත ප්‍රමේයය

පහත දැක්වෙන රූපය දෙස බලන්න. $C\hat{P}D$ පිහිටා තිබෙන්නේ ලා නිල් පැහැති විශාල වෘත්ත ඛණ්ඩය තුළ ය. එනම් $C\hat{P}D$ හා $D\hat{C}B$ කෝණ එකිනෙක ප්‍රතිවිරුද්ධ වෘත්ත ඛණ්ඩ තුළ පිහිටයි. එසේ ම, $C\hat{Y}D$ හා $A\hat{C}D$ කෝණ ද එකිනෙකට ප්‍රතිවිරුද්ධ වෘත්ත ඛණ්ඩ තුළ පිහිටයි.

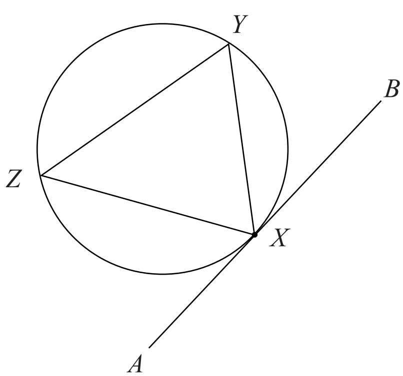


වෘත්තයක ස්පර්ශක සම්බන්ධ ඉතා වැදගත් ප්‍රතිඵලයක් ඇත. එම ප්‍රතිඵලයෙන් කියවෙන්නේ, ඉහත රූපය අනුව $D\hat{C}B$ හා $C\hat{P}D$ කෝණය සමාන බවත් $A\hat{C}D$ කෝණය හා $C\hat{Y}D$ කෝණය සමාන බවත් ය. වෙනත් අයුරකින් කිවහොත් "වෘත්තයක ස්පර්ශකයක් හා ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායත් අතර කෝණය, ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණයට (එනම් එම ජ්‍යායෙන්, ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය තුළ ආපාතික කෝණයට) සමාන වේ". මෙම ප්‍රතිඵලය ඉතා වැදගත් නිසා එය ප්‍රමේයයක් ලෙස ප්‍රකාශ කොට සිහි තබා ගනිමු.

ප්‍රමේයය : වෘත්තයකට ඇඳි ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන වේ.

මෙම ප්‍රමේයයේ සත්‍යතාව තහවුරු කර ගැනීම සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකම්වල යෙදෙන්න.

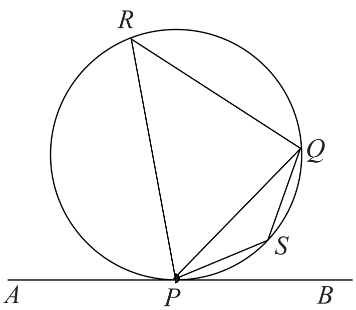
ක්‍රියාකාරකම 1



- වෘත්තයක් ඇඳ එය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය X ලෙස නම් කරන්න.

- X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන සරල රේඛාවක් අඳින්න (X හි දී වෘත්තයට අරයක් ඇඳ ඊට ලම්බව X හි දී රේඛාවක් ඇඳීමෙන් මෙය කළ හැකි ය.) එය AB ලෙස නම් කරන්න.
- වෘත්තය මත තවත් ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර එම ලක්ෂ්‍ය Y සහ Z ලෙස නම් කරන්න.
- X, Y හා Z ලක්ෂ්‍ය රූපයේ පරිදි යා කරන්න.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් $B\hat{X}Y$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $X\hat{Z}Y$ හි අගයන් මැන සොයා, ඒවා සමාන වේ දැයි සසඳා බලන්න.
- එසේම $A\hat{X}Z$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $X\hat{Y}Z$ කෝණ ද මැන ඒවා සමාන දැයි සසඳා බලන්න.

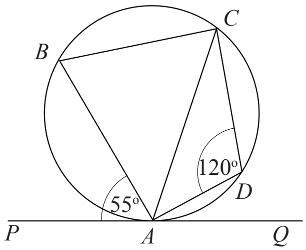
ක්‍රියාකාරකම 2



- වෘත්තයක් ඇඳ එය මත ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර එය P ලෙස නම් කරන්න. P ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරන සරල රේඛාවක් අඳින්න (P හි දී අරයක් ඇඳ ඊට ලම්බව P හි දී රේඛාවක් ඇඳීමෙන් මෙය කළ හැකි ය.) එය AB ලෙස නම් කරන්න.
- P ලක්ෂ්‍යයේ සිට ජ්‍යායක් ඇඳ එය PQ ලෙස නම් කරන්න.
- PQ ජ්‍යාය දෙපස පිහිටන ලෙස වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍ය දෙකක් ලකුණු කර ඒවා R හා S ලෙස නම් කරන්න.
- QR, QS, PS හා PR රේඛා ඛණ්ඩ අඳින්න.
- කෝණමානය භාවිතයෙන් $B\hat{P}Q$ හා ඊට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $P\hat{R}Q$ හි අගයන් මැන සොයා ඒවා සමාන වේ දැයි සසඳා බලන්න.
- එලෙසම $A\hat{P}Q$ හා ඊට ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණය වන $P\hat{S}Q$ කෝණ ද මැන ඒවා සමාන දැයි සසඳා බලන්න.

වෘත්තයක ස්පර්ශකයත් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ජ්‍යායත් අතර කෝණය එම කෝණයට අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන බව ඉහත ක්‍රියාකාරකම් මගින් අවබෝධ වන්නට ඇත.

නිදසුන 1



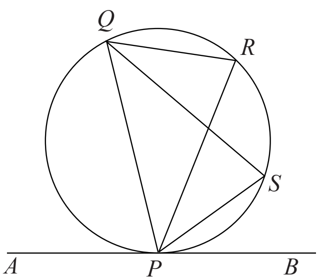
ඉහත දැක්වෙන රූපයේ PQ රේඛාව A ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. B, C සහ D ලක්ෂ්‍ය එම වෘත්තය මත පිහිටා ඇත. $P\hat{A}B = 55^{\circ}$ සහ $A\hat{D}C = 120^{\circ}$ කි. $B\hat{A}C$ අගය සොයන්න.

මුලින් ම $P\hat{A}C$ කෝණයෙහි අගය සොයමු.

$P\hat{A}C = A\hat{D}C$ (වෘත්තයක ජ්‍යායත් ස්පර්ශකයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන වේ)

$$P\hat{A}B + B\hat{A}C = 120^{\circ}$$
$$55^{\circ} + B\hat{A}C = 120^{\circ}$$
$$B\hat{A}C = 120^{\circ} - 55^{\circ}$$
$$= \underline{\underline{65^{\circ}}}$$

AB රේඛාව P හිදී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. Q සහ R එම වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. $P\hat{Q}R$ සමච්ඡේදකය S හිදී වෘත්තය හමු වේ. PS යන්න $B\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකය බව පෙන්වන්න.



$B\hat{P}S = P\hat{Q}S$ (වෘත්තයක ජ්‍යායත් ස්පර්ශකයත් අතර කෝණය ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණවලට සමාන නිසා)

$R\hat{P}S = R\hat{Q}S$ (එකම වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ සමාන නිසා)

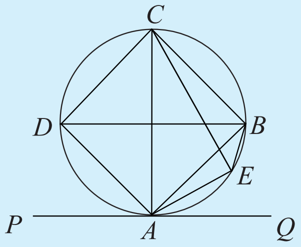
$P\hat{Q}S = R\hat{Q}S$ (දත්තය, $P\hat{Q}R$ සමච්ඡේදකය QS නිසා)

$\therefore\ B\hat{P}S = R\hat{P}S$

$\therefore\ PS$, $B\hat{P}R$ කෝණයේ කෝණ සමච්ඡේදකය වේ.

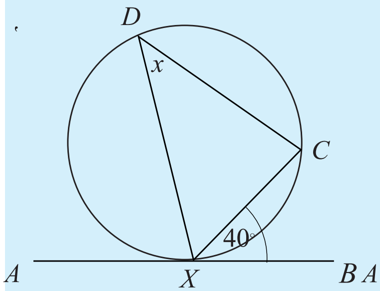
22.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය PQ වේ. B, C, D සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටයි.

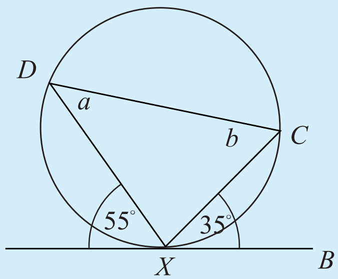


ස්පර්ශකයත් ජ්‍යායත් අතර කෝණය	අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩයේ කෝණ
$B\hat{A}Q$	....
$P\hat{A}B$	....
$P\hat{A}D$	....
$E\hat{A}Q$	....
....	$D\hat{B}A$
....	$D\hat{C}A$

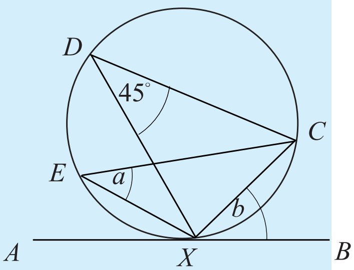
2. එක් එක් රූප සටහනේ AB ලෙස දැක්වෙන්නේ වෘත්තයට X ලක්ෂ්‍යයේ දී අඳින ලද ස්පර්ශකයකි. වීජීය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.



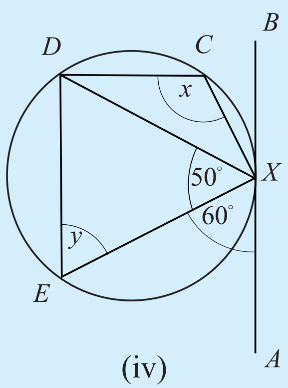
(i)



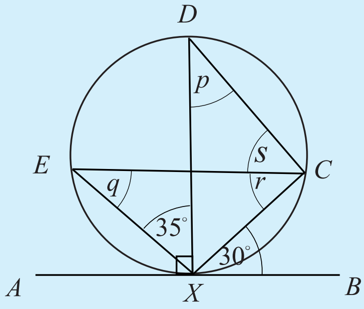
(ii)



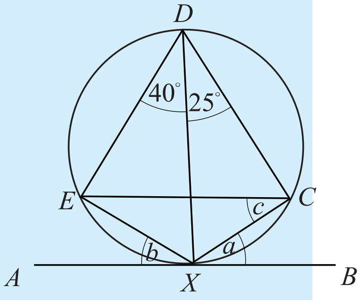
(iii)



(iv)



(v)



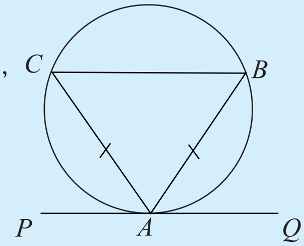
(vi)

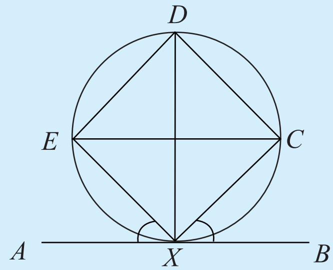
3. PQ යනු A හි දි වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. $AC = AB$ නම්,

(i) $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$ බවත්

(ii) $PQ // CB$ බවත්

පෙන්වන්න.





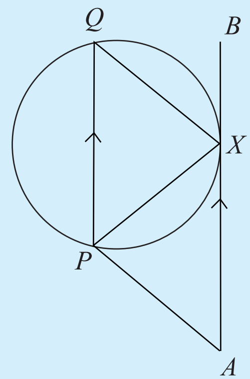
4. AB යනු X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. C සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටා ඇත්තේ $B\hat{X}C = A\hat{X}E$ වන පරිදි ය. D වෘත්තය මත පිහිටි තවත් ලක්ෂ්‍යයකි.

(i) $E\hat{D}C$ හි සමච්ඡේදකය XD බව

(ii) $EX = CX$ බව

(iii) $AB // EC$ බව

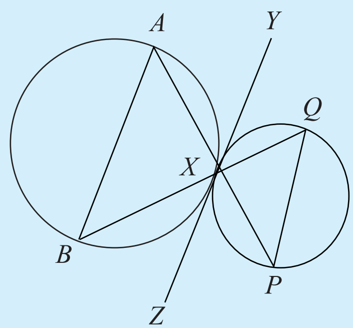
පෙන්වන්න.



5. AB රේඛාව X හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $PQ // AB$ වන සේ PQ ජ්‍යාය ඇඳ ඇත.

(i) $B\hat{X}Q = A\hat{X}P$ බව සාධනය කරන්න.

(ii) $PX = PA$ නම් $AXQP$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



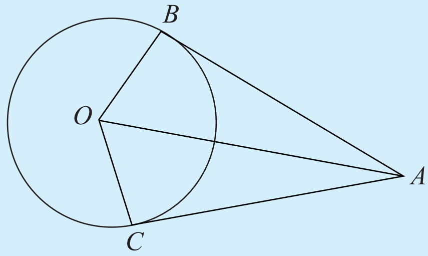
6. වෘත්ත දෙකක් බාහිරව X ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ වේ. YZ පොදු ස්පර්ශකය වේ. AB එක් වෘත්තයක ජ්‍යායකි. දික් කරන ලද AX සහ BX පිළිවෙලින් අනෙක් වෘත්තය P හා Q හි දී හමුවේ.

(i) $B\hat{X}Z = X\hat{P}Q$ බව පෙන්වන්න.

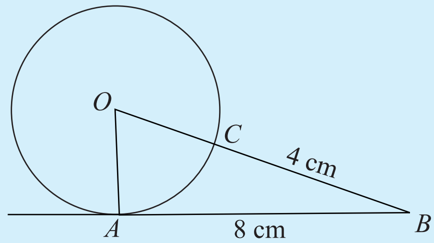
(ii) $AB // PQ$ බව පෙන්වන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

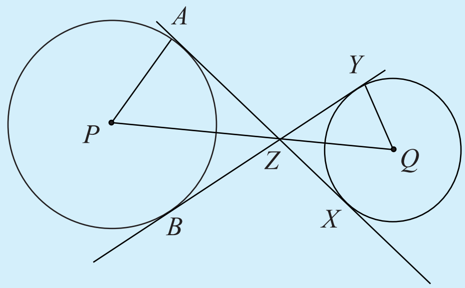
1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට A සිට අඳින ලද ස්පර්ශක B හා C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තයේ අරය 5 cm හා $OA = 13$ cm නම් $OBAC$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.



2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ අඳින ලද ස්පර්ශකය AB වේ. OB, C හි දී වෘත්තය ඡේදනය කරයි. $CB = 4$ cm සහ $AB = 8$ cm වේ. වෘත්තයේ අරය ගණනය කරන්න.



3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකේ කේන්ද්‍ර P හා Q වේ. විශාල වෘත්තය මත පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී එම වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් X හා Y හිදී කුඩා වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. තවද මෙම ස්පර්ශක දෙක Z හිදී එකිනෙක ඡේදනය වේ.

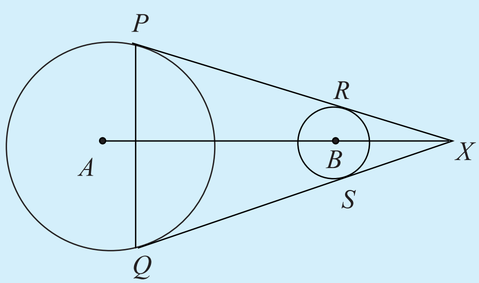


(i) $AX = BY$ බව

(ii) $A\hat{P}Z = Y\hat{Q}Z$ බව

පෙන්වන්න.

4. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි PX සහ QX ස්පර්ශක P, R, Q සහ S ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තවල කේන්ද්‍ර A සහ B වේ.



(i) $PR = QS$ බව

(ii) $PQ \,//\, RS$ බව

(iii) A, B සහ X එකම සරල රේඛාවක පිහිටන බව

පෙන්වන්න.

23 නිර්මාණ

මෙම පාඩම අධ්‍යයනයෙන් ඔබට
- සරල රේඛා හා කෝණ ආශ්‍රිත නිර්මාණ කිරීමට
- ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත වෘත්ත නිර්මාණය කිරීමට
- වෘත්ත ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

23.1 සරල රේඛා හා කෝණ ආශ්‍රිත නිර්මාණ

මෙම පාඩමේ ඉදිරි කොටස්වල දී අධ්‍යයනය කිරීමට නියමිත නිර්මාණ සඳහා උපයෝගී වන නිර්මාණ කීපයක් දැන් පුනරීක්ෂණය කරමු. ඒ සඳහා කවකටුව හා සරල දාරය පමණක් භාවිත කරනු ලැබේ.

1. සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට ලම්බ සමච්ඡේදකයක් නිර්මාණය කිරීම.

   සරල රේඛා ඛණ්ඩයක ලම්බ සමච්ඡේදකය යන්නෙන් අදහස් වන්නේ රේඛා ඛණ්ඩයේ හරි මැද ලක්ෂ්‍යය හරහා, සරල රේඛා ඛණ්ඩයට ලම්බව ඇඳි රේඛාවයි.

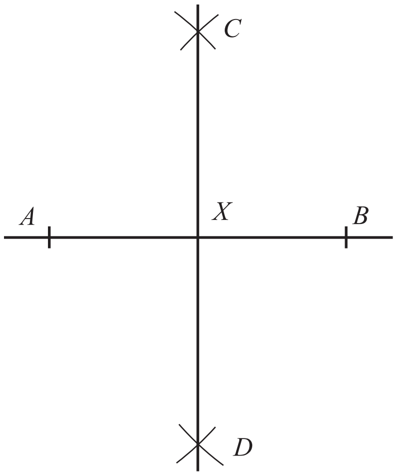
   AB රේඛා ඛණ්ඩයක් සලකමු.

පියවර 1: AB රේඛාවෙන් හරි අඩකට වඩා වැඩි අරයක් ලැබෙන සේ කවකටුව සකස් කරගන්න. A ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන, සරල රේඛාවේ ඉහළින් හා පහළින් වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 2: එම අරයම සහිත ව (එනම්, කවකටුව වෙනස් නොකර) B ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන, ඉහත දී අඳින ලද වෘත්ත චාප දෙක ඡේදනය වන පරිදි තවත් වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

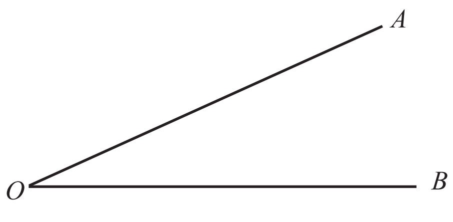
පියවර 3: එම වෘත්ත චාප ඡේදනය වූ ලක්ෂ්‍ය C හා D ලෙස නම් කර, C හා D හරහා ගමන් කරන සරල රේඛා ඛණ්ඩය අඳින්න.

පියවර 4: අඳින ලද සරල රේඛා ඛණ්ඩය AB රේඛා ඛණ්ඩය ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.



CD මගින් ලැබෙන්නේ AB රේඛා ඛණ්ඩයේ ලම්බ සමච්ඡේදකයයි. කෝණමානය භාවිතයෙන් $A\hat{X}C$, $B\hat{X}C$, $A\hat{X}D$ හා $B\hat{X}D$ කෝණ මැනීමෙන් ද cm / mm පරිමාණයක් භාවිතයෙන් AX හා BX හි දිග මැනීමෙන් ද ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

2. කෝණයක සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කිරීම :
AOB කෝණයක් සලකන්න.

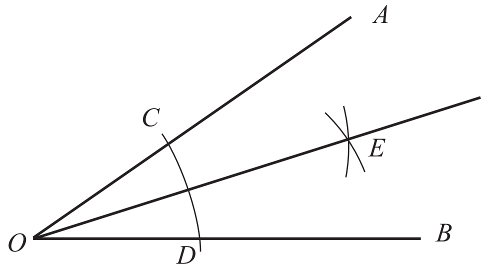


පියවර 1: OA හා OB හි දිගට වඩා අඩු අරයක් ලැබෙන සේ කවකටුව සකස් කරගන්න. O ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන OA හා OB සරල රේඛා ඛණ්ඩ ඡේදනය වන සේ වෘත්ත චාපයක් අඳින්න.

පියවර 2: වෘත්ත චාපය මඟින් OA හා OB රේඛා ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් C හා D ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3: කවකටුවට සුදුසු දුරක් අරය සේ ගෙන C හා D කේන්ද්‍ර කොටගත් එකිනෙක ඡේදනය වන වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න. එම ඡේදන ලක්ෂ්‍යය E ලෙස ලකුණු කරන්න.

පියවර 4: O හා E යා කරන්න.



OE මඟින් ලැබෙන්නේ $A\hat{O}B$ හි කෝණ සමච්ඡේදකයයි. කෝණමානය භාවිතයෙන් $A\hat{O}E$ හා $B\hat{O}E$ මැනීමෙන් ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

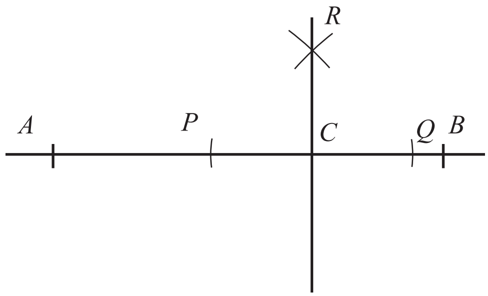
3. රේඛා ඛණ්ඩයක් මත දී ඇති ලක්ෂ්‍යයක දී ලම්බයක් නිර්මාණය කිරීම.
AB රේඛාව මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ලම්බය ඇඳිය යුතු යැයි සිතමු.

පියවර 1: සුදුසු අරයක් කවකටුවට ගෙන C ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන C ලක්ෂ්‍යයට දෙපසින් පිහිටන සේ AB රේඛා ඛණ්ඩය මත වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 2: එම වෘත්ත චාප මඟින් AB රේඛා ඛණ්ඩය ඡේදනය වන ස්ථාන P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3: P හා Q ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන එකිනෙක ඡේදනය වන සේ එකම අරය සහිත වෘත්ත චාප දෙකක් රේඛාවට ඉහළින් (හෝ පහළින්) අඳින්න.

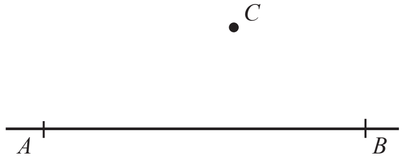
පියවර 4: එම චාප දෙක ඡේදනය වූ ලක්ෂ්‍යය R ලෙස නම්කර C හා R යා කෙරෙන සරල රේඛාව අඳින්න.



CR මඟින් ලැබෙන්නේ C හිදී AB ට ඇඳි ලම්බයයි. $A\hat{C}R$ හා $B\hat{C}R$ හි විශාලත්ව මැනීමෙන් ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

4. සරල රේඛා ඛණ්ඩයකට පිටතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක සිට එම සරල රේඛා ඛණ්ඩයට ලම්බයක් නිර්මාණය කිරීම.

දී ඇති සරල රේඛා ඛණ්ඩය AB යැයි ද පිටතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය C යැයි ද ගනිමු.

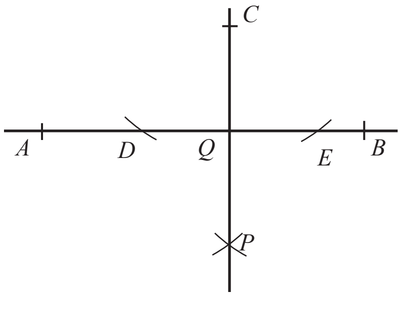


පියවර 1: C සිට AB ට ඇති දුරට වඩා වැඩි දුරක් අරය ලෙස ලැබෙන සේ කවකටුව සකස් කරගන්න. C ලක්ෂ්‍යය කේන්ද්‍ර කොටගෙන AB ඡේදනය වන සේ වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 2: එම වෘත්ත චාප මඟින් AB ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය D හා E ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 3: ඉහත අරයම (හෝ වෙනත් සුදුසු අරයක්) කවකටුවට ගෙන D හා E කේන්ද්‍ර ලෙස ගෙන AB රේඛා ඛණ්ඩයෙන් C පිහිටි පැත්තට ප්‍රතිවිරුද්ධ පැත්තේ එකිනෙක ඡේදනය වන වෘත්ත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 4: එම වෘත්ත චාප දෙක ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම්කර CP යා කරන්න. CP මඟින් AB රේඛා ඛණ්ඩය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යය Q ලෙස නම් කරන්න.



CP මගින් ලැබෙන්නේ C ලක්ෂ්‍යයේ සිට AB රේඛා ඛණ්ඩයට අඳින ලද ලම්බය යි. කෝණමානය භාවිතයෙන් $C\hat{Q}A$ හා $C\hat{Q}B$ හි විශාලත්වය මැනීමෙන් ඒ බව තහවුරු කරගන්න.

23.1 අභ්‍යාසය

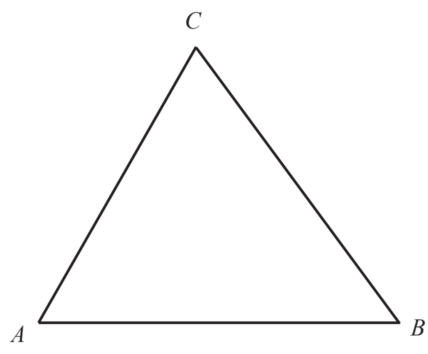
1. $AB = 5.2$ cm වන AB රේඛා ඛණ්ඩයෙහි ලම්බ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
2. 90^o කෝණයක් නිර්මාණය කර එහි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
3. $AB = 6$ cm ද $A\hat{B}C = 60^o$ ද $BC = 5$ cm ද වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය ද නිර්මාණය කරන්න.
4. (i) $PQ = 7$ cm ද $QR = 6.5$ cm ද $PR = 5$ cm ද වූ PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $Q\hat{P}R$ හි සමච්ඡේදකය හා $P\hat{Q}R$ හි සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න.
5. (i) $XY = 5.5$ cm වන රේඛා ඛණ්ඩයක් අඳින්න.
   (ii) X හිදී XY ට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම ලම්බය ඔස්සේ X සිට 4 cm ක් දුරින් වූ Z නම් ලක්ෂ්‍යය ලකුණු කර YZ යා කර X සිට YZ ට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.
6. (i) පාදයක දිග 6 cm වූ ABC නම් සමපාද ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) එක් එක් ශීර්ෂයේ සිට සම්මුඛ පාදයට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න.

23.2 ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත වෘත්ත නිර්මාණය

ත්‍රිකෝණයක පාදවල දිග හා කෝණවල විශාලත්ව දී ඇති විට කවකටුව හා සරල දාරය භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණ නිර්මාණය කරන ආකාරය මීට පෙර ඔබ අධ්‍යයනය කර ඇත. දැන් කවකටුව හා සරල දාරය පමණක් භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත වෘත්ත නිර්මාණය කළ හැකි අවස්ථා තුනක් අධ්‍යයනය කරමු.

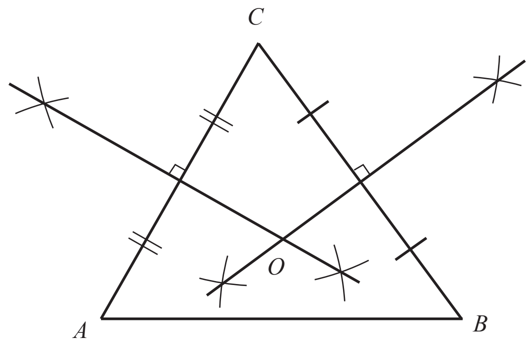
ත්‍රිකෝණයක පරිවෘත්තය නිර්මාණය කිරීම

ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC ලෙස නම් කරන්න.

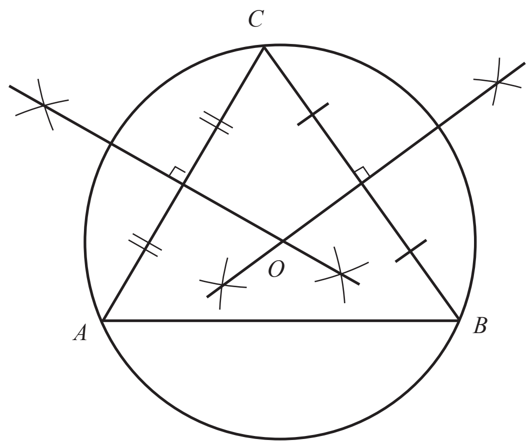


පියවර 1: කවකටුව භාවිතයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයේ AB, BC හා AC පාද තුනෙන් ඕනෑම පාද දෙකක ලම්බ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.

පියවර 2: ලම්බ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය O යැයි නම් කරන්න.



පියවර 3: O කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන O සිට ත්‍රිකෝණයේ ඕනෑම ශීර්ෂයකට ඇති දුර අරය ලෙස ද ගෙන, වෘත්තයක් අඳින්න.



ඉහත නිර්මාණය කරන ලද වෘත්තය ත්‍රිකෝණයේ A, B හා C ශීර්ෂ තුනම හරහා ගමන් කරන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. එම වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ **පරිවෘත්තය** ලෙස හැඳින්වේ. පරිවෘත්තයේ කේන්ද්‍රය **පරිකේන්ද්‍රය** නම් වේ.

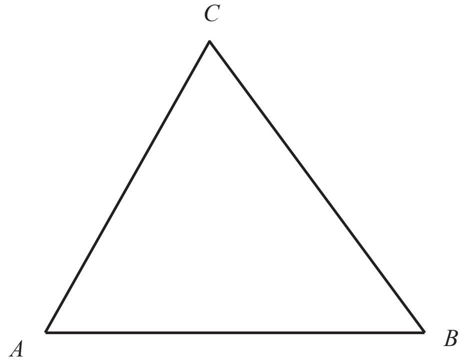
සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් හා මහාකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එම ත්‍රිකෝණවල ද පරිවෘත්ත නිර්මාණය කරන්න.

එම නිර්මාණ ඇසුරෙන් පහත වගුව සම්පූර්ණ කරන්න.

ත්‍රිකෝණය	පරිකේන්ද්‍රයේ පිහිටීම		
	ත්‍රිකෝණය තුළ	ත්‍රිකෝණයේ පාදයක් මත	ත්‍රිකෝණයට පිටත
සුළුකෝණික ත්‍රිකෝණය සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණය මහාකෝණික ත්‍රිකෝණය	✓	×	×

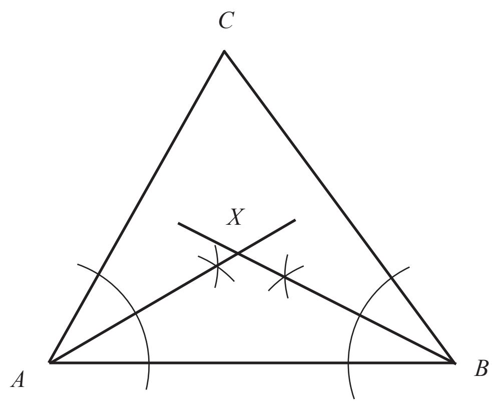
ත්‍රිකෝණයක අන්තර්වෘත්තය නිර්මාණය කිරීම

ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය ABC ලෙස නම් කරන්න.

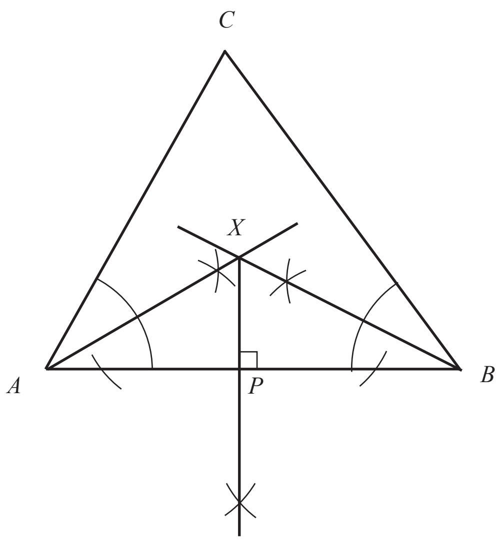


පියවර 1: කවකටුව භාවිතයෙන් ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C$, $B\hat{A}C$ හා $A\hat{C}B$ කෝණවලින් ඕනෑම කෝණ දෙකක සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.

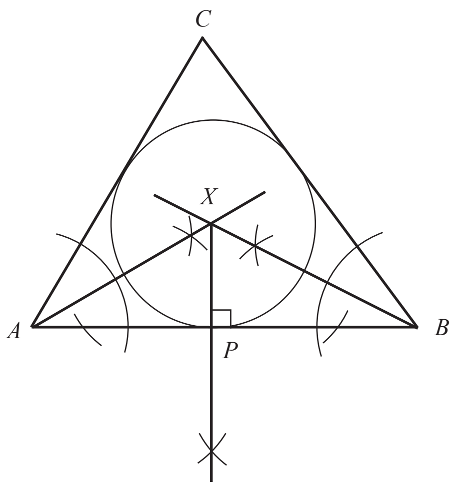
පියවර 2: කෝණ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 3 : X සිට ත්‍රිකෝණයේ ඕනෑම පාදයකට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. එම ලම්බයේ අඩිය P ලෙස නම් කරන්න.



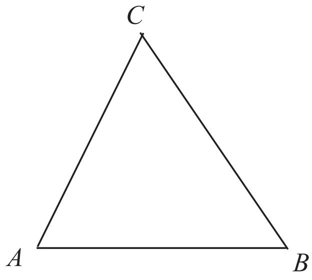
පියවර 4 : X කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන XP අරය වූ වෘත්තය අඳින්න.



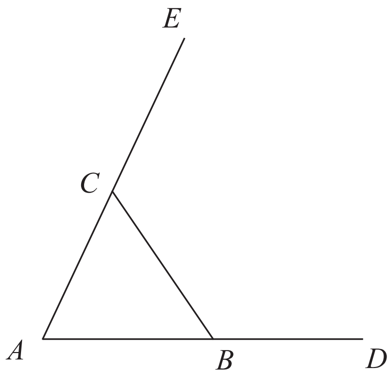
ඉහත නිර්මාණය කරන ලද වෘත්තය, ත්‍රිකෝණයේ ඇතුළතින් AB, BC හා AC පාද ස්පර්ශ කරමින් ගමන් කරන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. ඒ අනුව එම වෘත්තය ABC ත්‍රිකෝණයේ **අන්තර්වෘත්තය** ලෙස හැඳින්වේ. අන්තර්වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය **අන්තර්කේන්ද්‍රය** නම් වේ.

ත්‍රිකෝණයක බහිර් වෘත්තය නිර්මාණය කිරීම

ABC ත්‍රිකෝණය සලකමු.

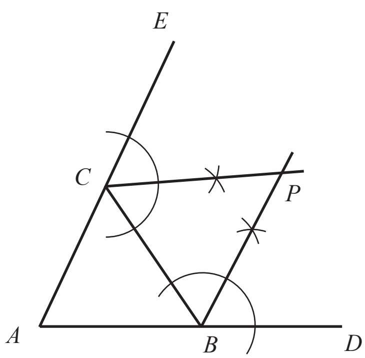


පියවර 1: AB පාදය D තෙක් ද AC පාදය E තෙක් ද දික් කරන්න.

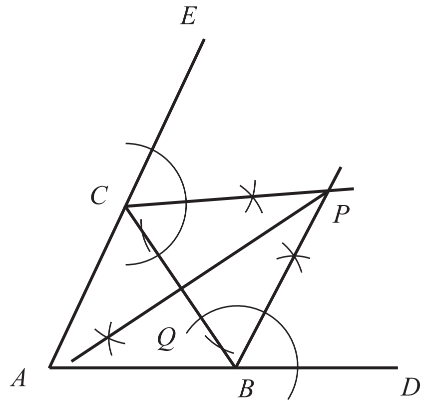


පියවර 2: කවකටුව භාවිතයෙන් $C\hat{B}D$ හා $B\hat{C}E$ හි කෝණ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.

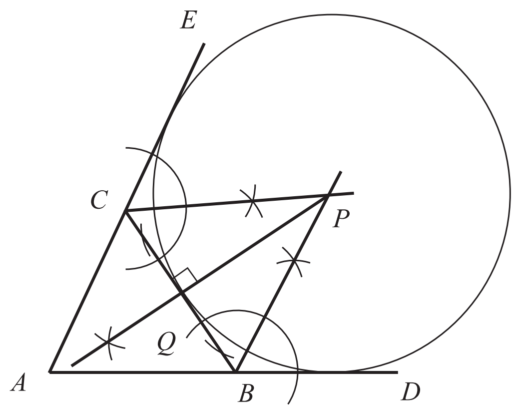
පියවර 3: කෝණ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 4: *P* සිට *BC* පාදයට (හෝ *CE* හෝ *BD* රේඛා ඛණ්ඩ මතට) ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. එම ලම්බයේ අඩිය *Q* ලෙස නම් කරන්න.



පියවර 5: *P* කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන *PQ* අරය වූ වෘත්තයක් අඳින්න.



ඉහත නිර්මාණය කරන ලද වෘත්තය දික්කල *AC* හා *AB* පාද දෙක සහ *BC* පාදය ත්‍රිකෝණයට බාහිරින් ස්පර්ශ කරමින් ගමන් කරන බව ඔබට පෙනෙනු ඇත. ඒ අනුව එම වෘත්තය, *ABC* ත්‍රිකෝණයේ **බහිර්වෘත්තයක්** ලෙස හැඳින්වේ. එම වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය **බහිර් කේන්ද්‍රය** නම් වේ.

සටහන: ඉහත ත්‍රිකෝණයේ දික්කල *CB* හා *CA* පාද බාහිරින් ස්පර්ශ වන බහිර්වෘත්තය මෙන්ම දික්කල *BA* හා *BC* පාද ස්පර්ශ වන බහිර්වෘත්ත ද නිර්මාණය කළ හැකි ය. මේ අනුව, ත්‍රිකෝණයකට බහිර්වෘත්ත තුනක් ඇති බව අවබෝධ කර ගන්න.

23.2 අභ්‍යාසය

1. (i) $AB = 5$ cm, $BC = 4.5$ cm හා $AC = 4$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) BC හා AC පාදවල ලම්බ සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න. ඒවා හමුවන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස නම් කරන්න.
   (iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

2. (i) $PQ = 6$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{o}$ හා $QR = 4$ cm වූ PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) PQR ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

3. (i) $XY = 4.2$ cm ද $Y\hat{X}Z = 120^{o}$ ද $X\hat{Y}Z = 30^{o}$ ද වූ XYZ ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) XYZ ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) පරිවෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.

4. (i) $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm හා $AC = 5.5$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $A\hat{B}C$ හා $B\hat{A}C$ කෝණවල සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) කෝණ සමච්ඡේදක හමුවන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කරන්න.
   (iv) ABC ත්‍රිකෝණයේ අන්තර්වෘත්තය අඳින්න.

5. (i) $KL = 6$ cm ද $L\hat{K}M = 105^{o}$ ද $LM = 9$ cm ද වූ KLM ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) KLM ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය නිර්මාණය කර එහි අරය මැන ලියන්න.

6. (i) $CD = 5.5$ cm ද $C\hat{D}E = 60^{o}$ ද $DE = 4$ cm ද වූ CDE ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $DP = 2.8$ cm වන පරිදි CD පාදය P දක්වාත් $EQ = 2.5$ cm වන පරිදි CE පාදය Q දක්වාත් ද දික් කරන්න.
   (iii) $E\hat{D}P$ හා $D\hat{E}Q$ කෝණවල සමච්ඡේදක නිර්මාණය කරන්න. ඒවා හමුවන ලක්ෂ්‍යය X ලෙස නම් කරන්න.
   (iv) X සිට DE ට ලම්බයක් නිර්මාණය කර එම ලම්බය DE හමුවන ලක්ෂ්‍යය K ලෙස නම් කරන්න.
   (v) X කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන XK අරය වන වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.

7. (i) $AB = 6.2$ cm, $A\hat{B}C = 120^{o}$, $BC = 4.5$ cm වූ $ABCD$ නම් සමාන්තරාස්‍රය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) AB පාදය හා AC පාදය දික්කිරීමෙන් ABC ත්‍රිකෝණයේ බහිර් වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම වෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.

23.3 වෘත්තයකට ස්පර්ශක නිර්මාණය කිරීම

ස්පර්ශක පාඩමේ දී ඉගෙනගත් වෘත්ත ස්පර්ශක සම්බන්ධ ප්‍රමේයයන් දෙකක් නැවත මතකයට නගා ගනිමු.

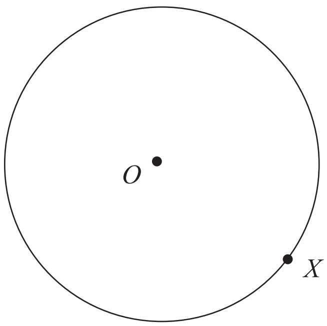
1. වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ එම ලක්ෂ්‍යයේ දී අරයට ලම්බකව ඇඳි සරල රේඛාව වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ.
2. වෘත්තයකට පිටතින් පිහිටි (බාහිර) ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයට අඳින ලද ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.

ඉහත ප්‍රමේයයන් භාවිතයෙන් වෘත්ත ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන ආකාරය දැන් අධ්‍යයනය කරමු.

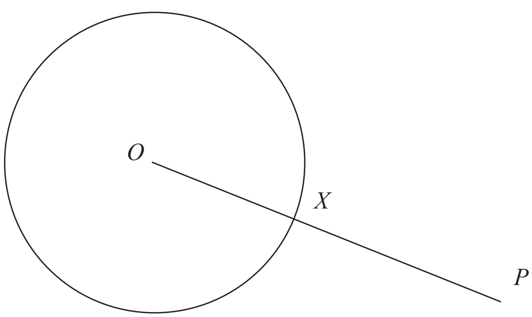
වෘත්තය මත ලක්ෂ්‍යයක දී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

මෙම නිර්මාණය කිරීම සඳහා "වෘත්තයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ අරයට ලම්බව ඇඳි සරල රේඛා ඛණ්ඩය වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් වේ" යන ප්‍රමේයය යොදා ගනිමු.

දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O යැයි ද X යනු වෘත්තය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.

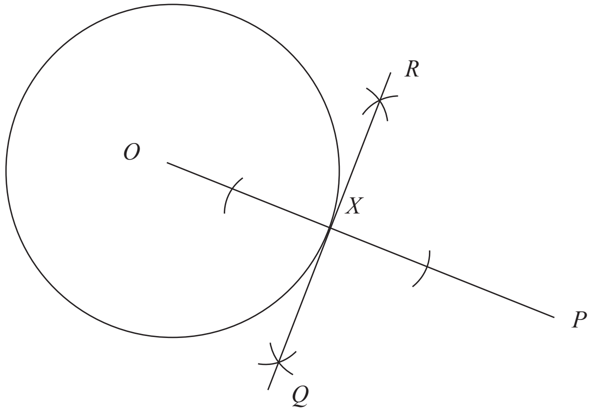


පියවර 1: OX රේඛාව ඇඳ එය දික් කළ කොටස මත P ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.



පියවර 2: කවකටුව භාවිතයෙන් X හිදී OP රේඛා ඛණ්ඩයට ලම්බයක් නිර්මාණය කරන්න. ඒ සඳහා රේඛා ඛණ්ඩයක් මත, දී ඇති ලක්ෂ්‍යයක දී ලම්බයක් නිර්මාණය කරන ආකාරය පිළිබඳ ව ඔබ උගත් කරුණු උපයෝගී කර ගන්න.

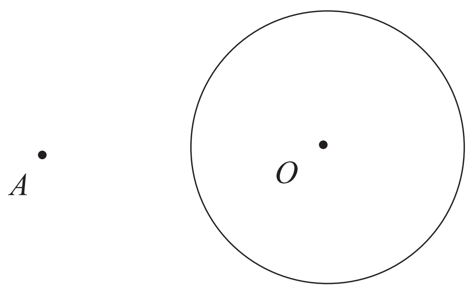
පියවර 3: එම ලම්බය RQ ලෙස නම් කරන්න.



RQ මගින් ලැබෙන්නේ X හි දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය යි.

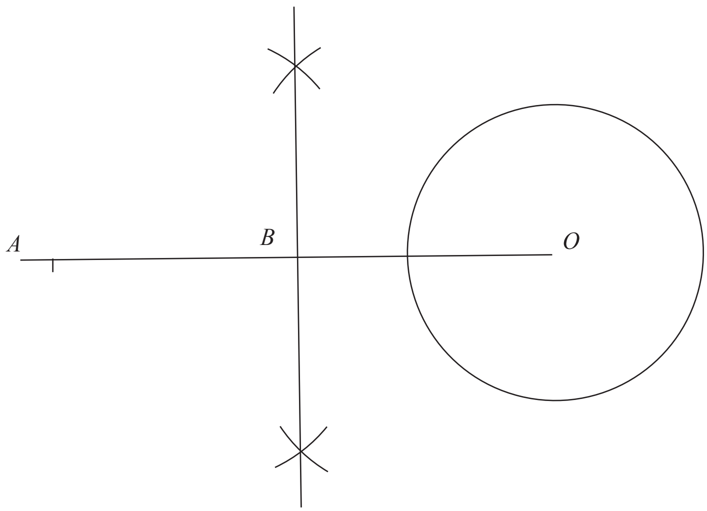
බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට වෘත්තයකට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කිරීම

දී ඇති වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O යැයි ද A යනු වෘත්තයට පිටතින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.



මෙම නිර්මාණය කිරීම සඳහා "වෘත්තයට පිටතින් පිහිටි (බාහිර) ලක්ෂ්‍යයක සිට අඳින ලද ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ" යන ප්‍රමේයය යොදා ගනිමු.

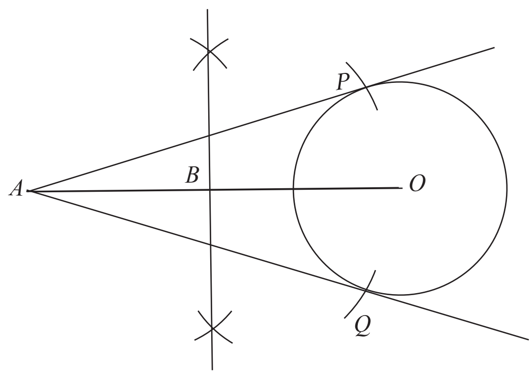
පියවර 1 : OA රේඛාව ඇඳ OA රේඛා ඛණ්ඩයේ ලම්බ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කර එය OA ඡේදනය කරන ලක්ෂ්‍යය B ලෙස නම් කරන්න. ඒ සඳහා රේඛා ඛණ්ඩයක ලම්බ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන ආකාරය පිළිබඳ ව ඔබ උගත් කරුණු උපයෝගී කරගන්න.



පියවර 2: B කේන්ද්‍රය ලෙස ගෙන BO (හෝ BA) අරය ලෙස ද ගෙන වෘත්තය මත චාප දෙකක් අඳින්න.

පියවර 3: දෙන ලද වෘත්තය හා චාප ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍ය දෙක P හා Q ලෙස නම් කරන්න.

පියවර 4: AP හා AQ රේඛා අඳින්න.



AP හා AQ මඟින් ලැබෙන්නේ A සිට O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වේ. කෝණමානය භාවිතයෙන් $A\hat{P}O$ හා $A\hat{Q}O$ මැන ඒවා 90^o බැගින් වන බව තහවුරු කරගන්න.

23.3 අභ්‍යාසය

1. අරය 3 cm වූ වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න. වෘත්තය මත A නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න. A හිදී වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කරන්න.

2. (i) අරය 3.5 cm ක් වූ වෘත්තයක් නිර්මාණය කර එහි කේන්ද්‍රය O ලෙස නම් කරන්න. වෘත්තය මත P නම් ලක්ෂයයක් ලකුණු කර P හි දී ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) ස්පර්ශකය මත $PQ = 5$ cm ක් වන සේ Q ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) OQ දිග මැන ලියන්න.
   (iv) පයිතගරස් ප්‍රමේයය ඇසුරෙන් OQ හි දිග ගණනය කර ඔබ ලබාගත් පිළිතුරෙහි සත්‍යතාව විමසන්න.

3. (i) පාදයක දිග 5 cm බැගින් වූ ABC සමපාද ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) B හිදී AB රේඛාව ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද C හරහා යන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම වෘත්තයේ අරය මැන ලියන්න.

4. (i) අරය 2.8 cm වූ O කේන්ද්‍රය වන වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) වෘත්තය මත A නම් ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කර OA යා කරන්න. දික්කල OA මත $OB = 5$ cm ක් වන සේ B ලක්ෂ්‍යයක් ලකුණු කරන්න.
   (iii) B සිට වෘත්තයට ස්පර්ශක නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) ස්පර්ශකවල දිග මැන ලියන්න.

5. (i) $AB = 5$ cm, $AC = 3$ cm හා $B\hat{A}C = 90^\circ$ වන ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) A හිදී ඉහත වෘත්තයට ස්පර්ශකයක් ද නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) A හිදී නිර්මාණය කරන ලද ස්පර්ශකය හා දික්කල BC හමුවන ලක්ෂ්‍යය P ලෙස නම් කරන්න.
   (v) P සිට වෘත්තයට වෙනත් ස්පර්ශකයක් නිර්මාණය කරන්න.

6. (i) $KL = 9$ cm, $K\hat{L}M = 90^\circ$, $LM = 4$ cm වන සේ KLM ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $K\hat{M}L$ හි කෝණ සමච්ඡේදකය නිර්මාණය කරන්න. එය KL රේඛාව හමුවන ලක්ෂ්‍යය O ලෙස නම් කරන්න.
   (iii) O කේන්ද්‍රය ද OL අරය ද වූ වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (iv) $ML = MT$ වන සේ T ලක්ෂ්‍යයක් KM මත ලකුණු කරන්න.
   (v) $O\hat{T}M$ හි අගය සොයන්න.
   (vi) K සිට ඉහත වෘත්තයට වෙනත් ස්පර්ශකයක් ද නිර්මාණය කරන්න.

මිශ්‍ර අභ්‍යාසය

1. (i) $AB = 6$ cm, $A\hat{B}C = 45^{o}$ හා $BC = 4$ cm වූ ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) A හරහා BC ට සමාන්තර රේඛාවක් නිර්මාණය කරන්න.
   (iii) එම සමාන්තර රේඛාව මත කේන්ද්‍රය පිහිටියා වූ ද A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන්නා වූ ද වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
2. (i) $PQ = 7$ cm, $P\hat{Q}R = 120^{o}$ හා $QR = 4.5$ cm වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.
   (ii) $PQRS$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි S ලක්ෂ්‍යය සොයන්න.
   (iii) QS විකර්ණය අඳින්න.
   (iv) PQS ත්‍රිකෝණයේ පරිවෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
   (v) QRS ත්‍රිකෝණයේ අන්තර් වෘත්තය නිර්මාණය කරන්න.
3. $PQ = 4.8$ cm, $P\hat{Q}R = 90^{o}$ ද $QR = 6.5$ cm ද වන PQR ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න. PQ පාදය P හිදි ස්පර්ශ කරමින් QR පාදය ද ස්පර්ශ කරන වෘත්තයක් නිර්මාණය කරන්න.

24 කුලක

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- වෙන් රූප සටහනකට අදාළ ප්‍රදේශ හඳුනා ගැනීමටත්,
- එම ප්‍රදේශ කුලක අංකනයෙන් දැක්වීමටත්
- වෙන් රූප සටහන් භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීමටත්

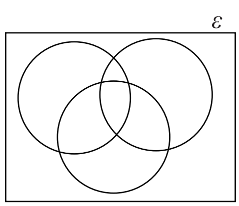
හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

වෙන් රූප සටහන්

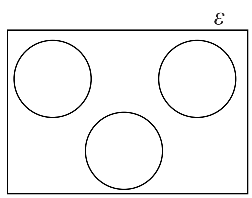
උප කුලක දෙකක් දක්වා ඇති වෙන් රූප සටහන්වලට අදාළ ප්‍රදේශ හඳුනා ගැනීමටත්, වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයක් කුලක අංකනයෙන් ලියා දැක්වීමටත් 10 ශ්‍රේණියේ දී ඔබ ඉගෙන ගෙන ඇත. සර්වත්‍ර කුලකයක ඇති උප කුලක තුනක් ද වෙන් රූප සටහනක නිරූපණය කළ හැකි වේ. එසේ නිරූපණය කරන ආකාරය දැන් විමසා බලමු.

සර්වත්‍ර කුලකයක අභිශූන්‍ය නොවන උප කුලක තුනක් වෙන් රූප සටහනක පිහිටිය හැකි අවස්ථා ගණනාවක් පහත දැක්වේ. මුලින් ම දක්වා ඇත්තේ වඩාත් සාධාරණ නිරූපණය යි.

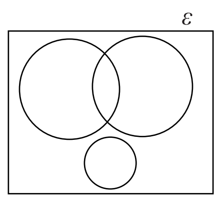
(i)



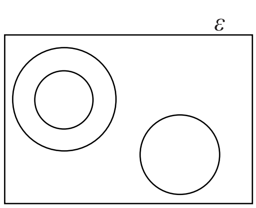
(ii)



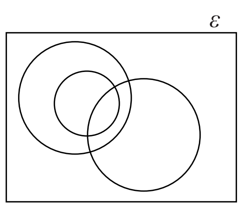
(iii)



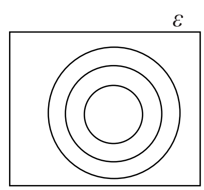
(iv)



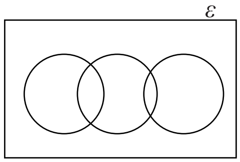
(v)



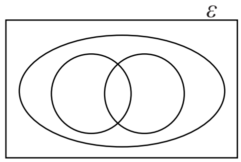
(vi)



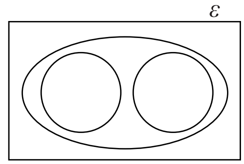
(vii)



(viii)

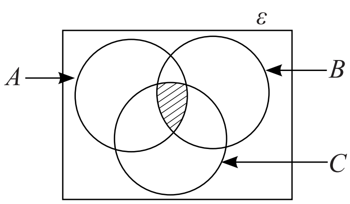


(ix)

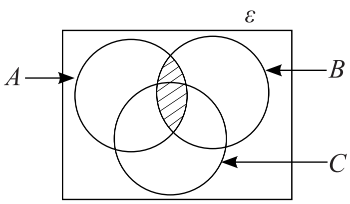


24.1 වෙන් රූප සටහනක අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයකට අදාළ උපකුලක කුලක අංකනයෙන් දැක්වීම

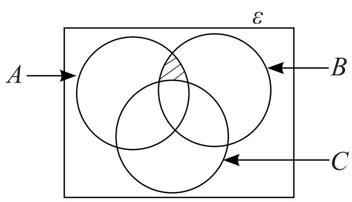
A, B හා C යනු සර්වත්‍ර කුලකයක අභිශූන්‍ය නොවන උපකුලක තුනක් යැයි ගනිමු. වෙන් රූප සටහනේ අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශයක් කුලක අංකනයෙන් ලියා දක්වා ඇති අවස්ථා ගණනාවක් පහත දැක්වේ.



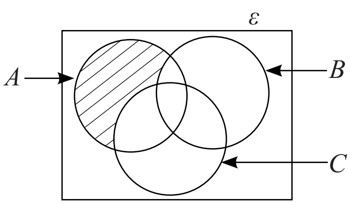
$A \cap B \cap C$



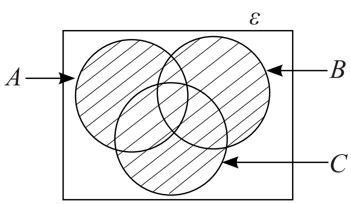
$A \cap B$



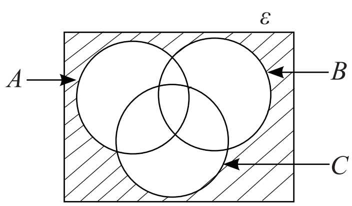
$(A \cap B) \cap C'$



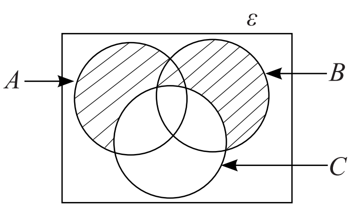
$A \cap (B \cup C)'$



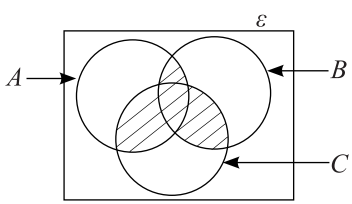
$A \cup B \cup C$



$(A \cup B \cup C)'$



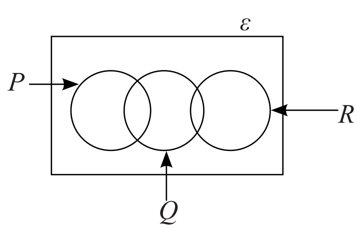
$(A \cup B) \cap C'$



$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

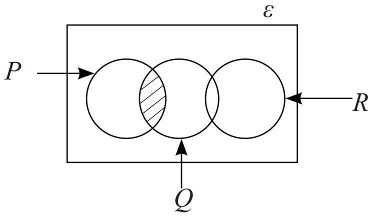
නිදසුන 1

පහත දැක්වෙන එක් එක් කුලකය, දී ඇති වෙන් රූප සටහනෙහි පිටපතක අඳුරු කොට දක්වන්න.

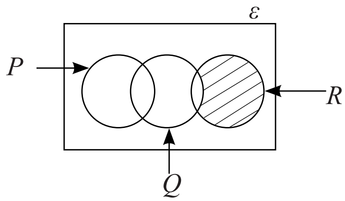


(i) $P \cap Q$ (ii) $(P \cup Q)' \cap R$ (iii) $(P \cup R)' \cap Q$
(iv) $(P \cup Q \cup R)'$

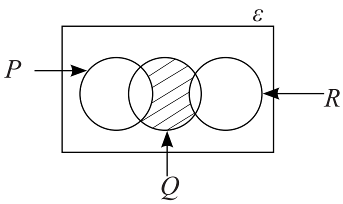
(i) $P\cap Q$



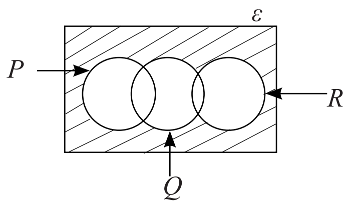
(ii) $(P\cup Q)'\cap R$



(iii) $(P\cup R)'\cap Q$

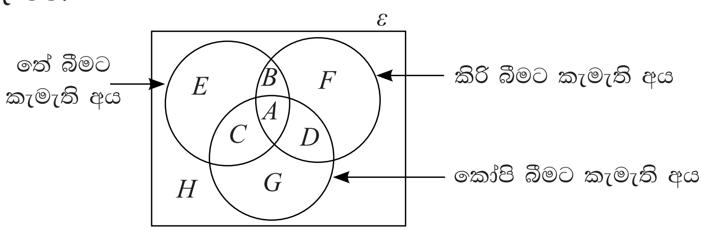


(iv) $(P\cup Q\cup R)'$



මීළඟට අප සලකා බලන්නේ, වෙන්රූප සටහනක් තුළ ඇති ප්‍රදේශ වාචික ව විස්තර කෙරෙන ආකාරය යි. නිදසුනක් ඇසුරෙන් එය හැදෑරීම වඩා පහසු ය.

පහත වෙන් රූප සටහනෙන් දැක්වෙන්නේ සිසුන් සමූහයක් කැමැති පාන වර්ග පිළිබඳ තොරතුරු වේ.



ඉහත වෙන් රූප සටහන තුළ ඉංග්‍රීසි අක්ෂර මගින් නිරූපණය වන පෙදෙස් මෙසේ වාචික ව විස්තර කළ හැකි ය.

A - තේ, කිරි හා කෝපි වර්ග තුනම බීමට කැමැති අය

B - තේ සහ කිරි පමණක් බීමට කැමති අය එනම්, තේ සහ කිරි බීමට කැමැති එහෙත් කෝපි බීමට අකමැති අය

C - තේ සහ කෝපි පමණක් බීමට කැමැති අය

D - කිරි සහ කෝපි පමණක් බීමට කැමැති අය

E - තේ පමණක් බීමට කැමැති අය

F - කිරි පමණක් බීමට කැමැති අය

G - කෝපි පමණක් බීමට කැමැති අය

H - ඉහත පානයන් තුනම බීමට අකමැති අය

තවද, ඉහත ප්‍රදේශ කීපයක් එක්ව ගත්විට ලැබෙන මුළු ප්‍රදේශය වාචික ව විස්තර කළ හැකි ආකාරය ද බොහෝ විට සරල ව විස්තර කළ හැකි ය.

A හා B	- තේ සහ කිරි බීමට කැමැති අය
B, C හා D	- පාන වර්ග දෙකක් **පමණක්** බීමට කැමැති අය
A, B, C හා D	- පාන වර්ග දෙකක්**වත්** බීමට කැමැති අය
A, B, C හා E	- තේ බීමට කැමැති අය
E, F හා G	- එක් පාන වර්ගයක් **පමණක්** බීමට කැමති අය

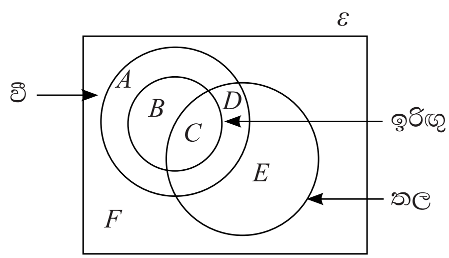
නිදසුන 2

පහත වෙන් රූපසටහනෙන් දැක්වෙන්නේ ගොවීන් කණ්ඩායමක් විසින් වගා කරන ලද බෝග පිළිබඳ තොරතුරු වේ. එහි එක් එක් ඉංග්‍රීසි අකුරෙන් දැක්වෙන ප්‍රදේශයට අදාළ උප කුලකයත් (i) B හා C

(ii) C හා D

(iii) A, D හා E

යන එක් එක් සංයුක්ත ප්‍රදේශයට අදාළ උප කුලකයත් වාචික ව විස්තර කරන්න.



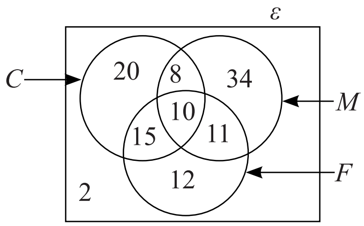
A - වී පමණක් වගා කරන ගොවීන්
B - වී සහ ඉරිඟු පමණක් වගා කරන ගොවීන්
C - වී, ඉරිඟු හා තල වර්ග තුනම වගා කරන ගොවීන්
D - වී සහ තල පමණක් වගා කරන ගොවීන්
E - තල පමණක් වගා කරන ගොවීන්
F - ඉහත වර්ග තුනම වගා නොකරන ගොවීන්
B හා C - ඉරිඟු වගා කරන ගොවීන්
C හා D - වී හා තල වගා කරන ගොවීන්
A, D හා E - එක් වර්ගයක්වත් වගා කරන නමුත් ඉරිඟු වගා නොකරන ගොවීන්

නිදසුන 3

ε = {නිවාස යෝජනා ක්‍රමයක ඇති නිවාස}ලෙස ගනිමු.
C = {කාර් ඇති නිවාස}
M = {මෝටර් සයිකල් ඇති නිවාස}
F = {පාපැදි ඇති නිවාස}

මෙම උප කුලක පහත දැක්වෙන වෙන්රූප සටහනේ නිරූපණය කරනු ලැබ ඇත. සංඛ්‍යා මගින් දැක්වෙන්නේ අදාළ උප කුලකවල ඇති අවයව ගණනයි.

මෙම නිවාස යෝජනා ක්‍රමයේ,



(i) කාර් ඇති නිවාස සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) මෝටර් සයිකල් **පමණක්** ඇති නිවාස කොපමණ ද?
(iii) පාපැදි නැති නිවාස සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iv) වාහන වර්ග දෙකක් පමණක් ඇති නිවාස සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(v) වාහන වර්ග දෙකක්වත් ඇති නිවාස සංඛ්‍යා
(vi) එක් වාහන වර්ගයක් පමණක් ඇති නිවාස සංඛ්‍යාව

(i) කාර් ඇති නිවාස C කුලකයෙන් නිරූපණය වන නිසා C කුලකයට අයත් සියලු නිවාස ගත යුතු ය. එමනිසා කාර් ඇති නිවාස ගණන වන්නේ $20 + 8 + 10 + 15 = 53$.

(ii) මෝටර් සයිකල් ඇති නිවාස නිරූපණය වන්නේ M කුලකයෙනි. මෝටර් සයිකල් **පමණක්** ඇති නිවාස වන්නේ මෝටර් සයිකල් ඇති නමුත් කාර් හා පාපැදි නැති නිවාස වේ. එබැවින් මෝටර් සයිකල් තිබෙන නිවාස අතරින් කාර් හෝ පාපැදි තිබෙන නිවාස ඉවත් කළ යුතු ය. එමනිසා මෝටර් සයිකල් පමණක් ඇති නිවාස ගණන 34 වේ.

(iii) පාපැදි නොමැති නිවාස වන්නේ, මුළු නිවාස ගණනින් පාපැදි ඇති නිවාස ඉවත් කළ විට ලැබෙන නිවාස වේ. තවත් ආකාරයකින් කිව හොත් පාපැදි නොමැති නිවාස යනු කාර් පමණක් ඇති, මෝටර් සයිකල් පමණක් ඇති, කාර් සහ මෝටර් සයිකල් පමණක් ඇති නිවාස හා වාහන වර්ග තුනම නොමැති නිවාස වේ. එනම් $20 + 8 + 34 + 2 = 64$.

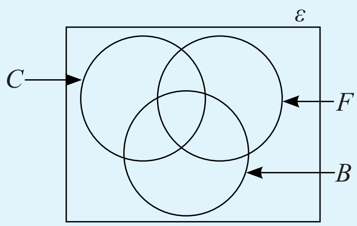
(iv) වාහන වර්ග දෙකක් පමණක් ඇති නිවාස යනු කාර් හා මෝටර් සයිකල් පමණක් ද මෝටර් සයිකල් හා පාපැදි පමණක් ද කාර් හා පාපැදි පමණක් ද ඇති නිවාස වේ. එනම්, $15 + 8 + 11= 34$.

(v) වාහන වර්ග දෙකක්වත් ඇති නිවාස යනු වාහන වර්ග දෙකක් හෝ තුනක් ඇති නිවාස වේ. එනම්, $15 + 8 + 11 + 10 = 44$.

(vi) එක් වාහන වර්ගයක් පමණක් ඇති නිවාස වන්නේ මෝටර් සයිකලයක් පමණක්, කාර් පමණක් හෝ පාපැදි පමණක් ඇති නිවාස වේ. එනම්, $20 + 34 + 12 = 66$.

24.1 අභ්‍යාසය

1. පාසලක සිටින සිසුන් සමූහයකින් එක් එක් සිසුවා කැමැති ක්‍රීඩාව පිළිබඳව ලබාගත් තොරතුරු ඇසුරෙන් සකස් කෙරුණු වෙන් රූප සටහනක් පහත දැක්වේ.

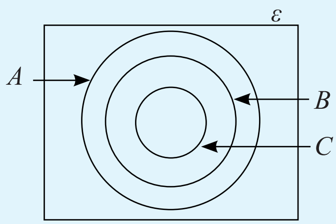


C = {ක්‍රිකට් ක්‍රීඩාවට කැමැති සිසුන්}
F = {පාපන්දු ක්‍රීඩාවට කැමැති සිසුන්}
B = {පැසිපන්දු ක්‍රීඩාවට කැමැති සිසුන්}

මෙම වෙන්රූප සටහන් ආකෘතිය භාවිතයෙන් පහත එක් එක් අංකනයෙන් දක්වා ඇති කුලකය නිරූපණය කෙරෙන ප්‍රදේශය අඳුරු කර දක්වා එය වාචිකව ද විස්තර කර ලියන්න.

(i) $B \cap C \cap F$ (ii) $(C \cap F) \cap B'$ (iii) $(B \cup C)' \cap F$ (iv) $(B \cup C \cup F)'$

2.

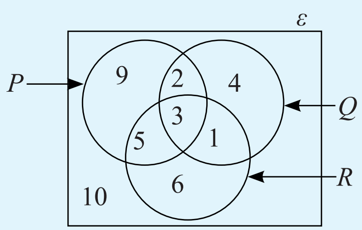


දී ඇති වෙන් රූප සටහන් ආකෘතිය භාවිතයෙන්,

(a) පහත එක් එක් අංකනයෙන් දක්වා ඇති උප කුලකය නිරූපණය කෙරෙන ප්‍රදේශය අඳුරු කර දක්වන්න.

(i) $A \cap B \cap C$ (ii) $B \cap C'$
(iii) $A \cap (B \cup C)'$ (iv) $(A \cup B \cup C)'$

3.



මෙම වෙන් රූප සටහන අනුව පහත සඳහන් ඒවා සොයන්න.

(i) $n\,(P \cap Q \cap R)$ (ii) $n\,(Q \cup R)'$
(iii) $n\,[(P \cap Q) \cap R']$ (iv) $n\,[(Q \cup R)' \cap P]$
(v) $n\,(P \cup Q \cup R)'$

වෙන්රූප සටහන තුළ ලකුණු කර ඇත්තේ එක් එක් පෙදෙසට අයත් අවයව ගණන බව සළකන්න.

24.2 කුලක ආශ්‍රිත ගැටලු තවදුරටත්

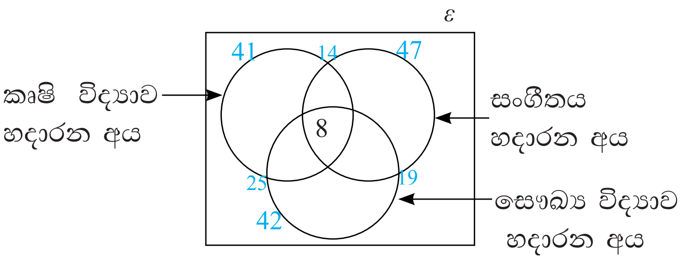
කුලක ආශ්‍රිත ව ගැටලු විසඳීම උදාහරණ කීපයකින් විමසමු.

නිදසුන 1

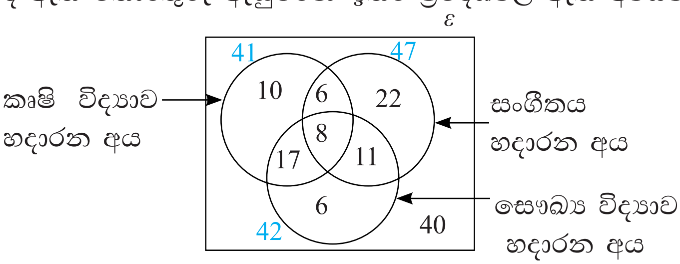
සිසුන් 120ක කණ්ඩායමකින් 41ක් කෘෂි විද්‍යාව ද, 47ක් සංගීතය ද, 42ක් සෞඛ්‍ය විද්‍යාව ද හදාරති. 14ක් කෘෂි විද්‍යාව හා සංගීතය ද, 19ක් සංගීතය හා සෞඛ්‍ය විද්‍යාව ද, 25ක් කෘෂි විද්‍යාව හා සෞඛ්‍ය විද්‍යාව ද, 8ක් විෂයන් තුනම ද හදාරති. මෙම තොරතුරු වෙන්

රූප සටහනක දක්වා පහත සඳහන් දෑ සොයන්න.

(i) කෘෂි විද්‍යාව පමණක් හදාරන සිසුන් ගණන
(ii) එක් විෂයක් පමණක් හදාරන සිසුන් ගණන
(iii) විෂයන් දෙකක්වත් හදාරන සිසුන් ගණන
(iv) මින් කිසි ම විෂයක් නොහදාරණ සිසුන් ගණන



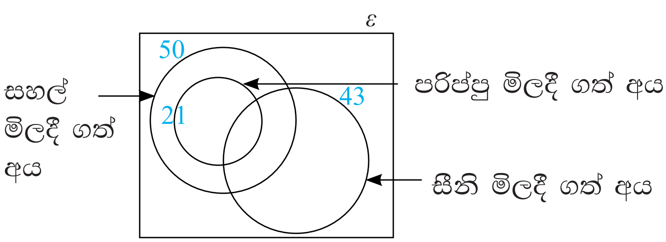
දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් ඉතිරි ප්‍රදේශවල ඇති අවයව ගණන සොයමු.



(i) 10
(ii) $10 + 22 + 6 = 38$
(iii) $17 + 6 + 11 + 8 = 42$
(iv) 40

නිදසුන 2

එක්තරා දිනයක දී පැයක් ඇතුළත වෙළෙඳසැලකට පැමිණි පාරිභෝගිකයන් පිළිබඳ ව රැස්කර ගත් තොරතුරු අනුව 50 දෙනෙක් සහල් ද, 21දෙනෙක් පරිප්පු ද, 43 දෙනෙක් සීනි ද මිලදී ගෙන ඇත. තවද පරිප්පු මිල දී ගත් සියලු දෙනාම සහල් ද මිලදී ගෙන ඇත. එම තොරතුරු හා වෙනත් තොරතුරු වෙන් රූප සටහනේ දැක්වේ.



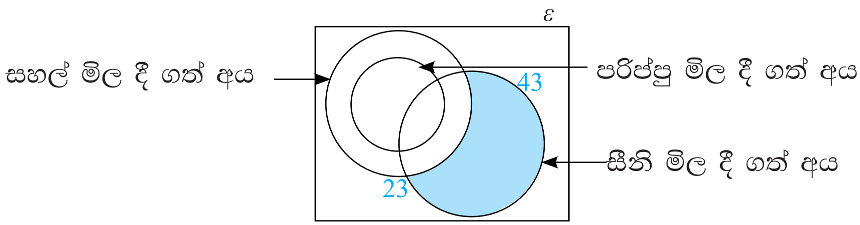
(i) සහල් සහ සීනි මිලදී ගත් අය 23කි. සීනි පමණක් මිලදී ගත් අය ගණන කොපමණ ද?
(ii) වර්ග තුනම මිලදී ගත් අය 12ක් වේ. සහල් සහ පරිප්පු යන වර්ග දෙක **පමණක්** මිලදී ගත් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) සහල් පමණක් මිලදී ගත් අය

(iv) එම පැය තුළ පැමිණි මුළු පිරිස 90ක් නම් සහල්, පරිප්පු හා සීනි හැර වෙනත් දේ ගැනීමට පැමිණි සංඛ්‍යාව කීය ද?

පිළිතුරු

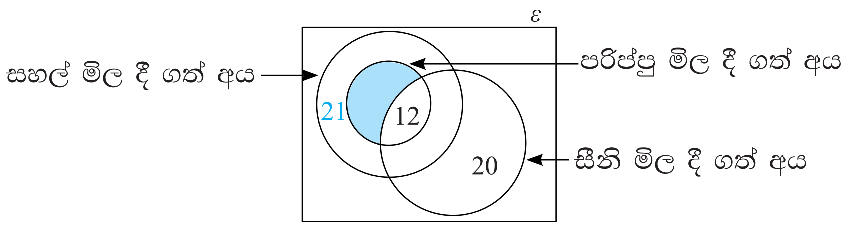
දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් එක් එක් ප්‍රදේශයට අයත් අවයව ගණන සොයමු.

(i)



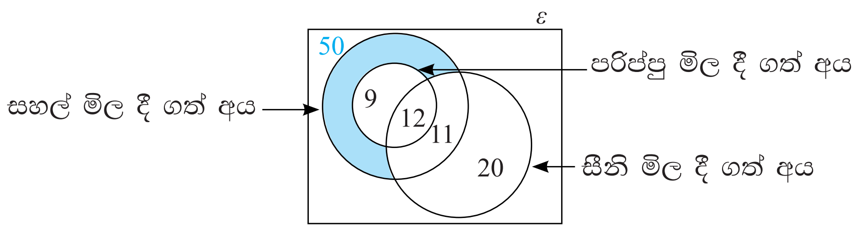
සීනි පමණක් මිල දී ගත් අය ගණන වන්නේ 43 – 23 = 20

(ii)



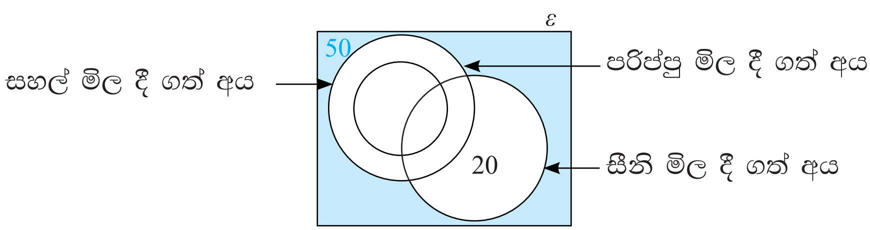
සහල් හා පරිප්පු පමණක් මිල දී ගත් අය ගණන වන්නේ 21 – 12 = 9

(iii)



සහල් පමණක් මිල දී ගත් අය ගණන වන්නේ 50 – 9 – 12 – 11 = 18

(iv)



සහල්, පරිප්පු හා සීනි හැර වෙනත් දේ ගැනීමට පැමිණි අය ගණන 90 – 70 = 20

24.2 අභ්‍යාසය

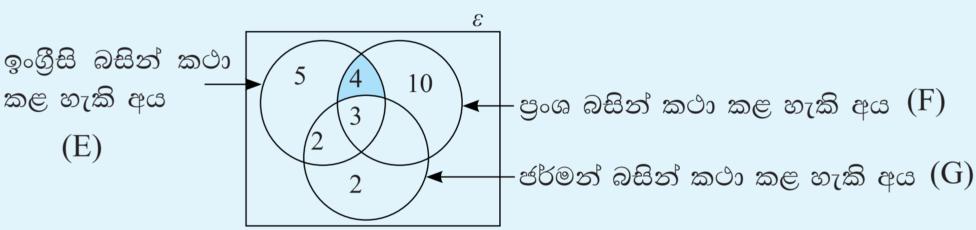
1. පාසල් ලිපි ද්‍රව්‍ය විකුණන කඩයකට පැමිණි 20 දෙනෙක් තමාට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය මිලදී ගත් අයුරු මෙසේ වෙයි. පැන්සල් ගත් අය 8 දෙනෙක් ද, පෑන් ගත් අය 11 දෙනෙක් ද, පොත් ගත් අය 13 දෙනෙක් ද වන අතර පැන්සල් හා පොත් ගත් 6 දෙනාගෙන් 4 දෙනෙක් පෑන් නොගත්හ. පැන්සල් හා පෑන් යන දෙවර්ගය ම ගත් අය 3 දෙනෙකි. පෑන් පමණක් ගත් අයද 3 දෙනෙකි. වෙන් සටහනක් භාවිතයෙන් මේවා සොයන්න.

(i) ඉහත ද්‍රව්‍ය කිසිවක් නොගත් අය කොපමණ ද?
(ii) පෑන් නොගත් අය කොපමණ ද?
(iii) කඩයට පැමිණි මුළු සංඛ්‍යාවෙන් කවර ප්‍රතිශතයක් මෙම ද්‍රව්‍යවලින් අඩු වශයෙන් වර්ග දෙකක්වත් මිලදී ගත්තේ ද?

2. *A*, *B* හා *C* නැමැති පුවත්පත් තුන මිල දී ගැනීම පිළිබඳ ව එක් ගමක කරන ලද සමීක්ෂණයක දී පහත තොරතුරු ලැබුණි. 50% ක් *A* පුවත්පත ද, 67% ක් *B* පුවත්පත ද, 55% ක් *C* පුවත්පත ද මිලදී ගනිති. 10% ක් *A* හා *B* පුවත්පත් පමණක් ගනී. 15% ක් *A* පුවත්පත පමණක් ගනී. 5% ක් *A* හා *C* පුවත්පත් ගන්නා නමුත් *B* පුවත්පත නොගනී. 17% ක් *A* පුවත්පත නොගන්නා නමුත් *B* හා *C* පුවත්පත් ගනී. වෙන් රූප සටහනක් මගින් මේවා සොයන්න.

(i) පුවත්පත් වර්ග තුනම ගන්නා අයගේ ප්‍රතිශතය
(ii) *A* පුවත්පත නොගන්නා එහෙත් *C* පුවත්පත ගන්නා අයගේ ප්‍රතිශතය
(iii) පුවත්පත් දෙකක් පමණක් ගන්නා අයගේ ප්‍රතිශතය

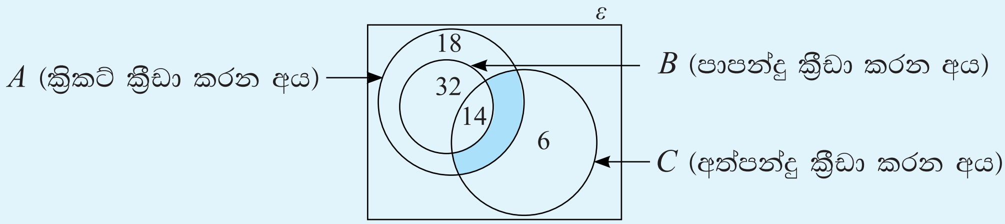
3. සීගිරිය නැරඹීමට පැමිණි විදේශීය සංචාරක කණ්ඩායමක සිටිනා සංචාරකයනට කථා කළ හැකි භාෂා පිළිබඳ ව පත්‍රිකාවක සටහන් කරනු ලැබූ තොරතුරු ඇසුරෙන් පහත වෙන් රූප සටහන ඇඳ ඇත.



(i) ඉංග්‍රීසි භාෂාවෙන් කථා කළ හැකි සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) ජර්මන් භාෂාව කථා කළ හැකි මුළු පිරිස 12 නම් ප්‍රංශ හා ජර්මන් පමණක් කථා කළ හැකි සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) රූපයේ අඳුරු කර ඇති පෙදෙසින් නිරූපණය වන සංචාරකයන්ගේ භාෂා හැකියා පිළිබඳ වචනයෙන් විස්තර කරන්න. එම පෙදෙස කුලක අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න.
(iv) ඉංග්‍රීසි භාෂාව කථා කළ හැකි සියලු දෙනා ඉංග්‍රීසි විස්තර විචාරකයා විසින් රඳවා ගෙන ඉතිරි අය ජර්මන් සහ ප්‍රංශ භාෂා දෙකම කථා කළ හැකි විස්තර

විචාරකයෙකු වෙත භාර දෙන ලදී. එම විචාරකයා වෙත භාර දුන් මුළු පිරිස කොපමණ ද?

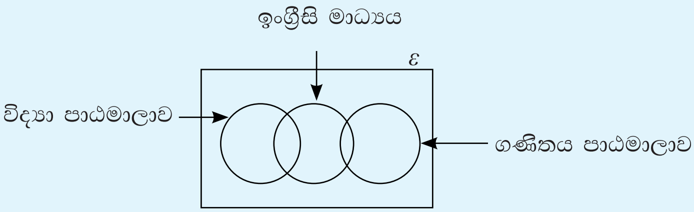
4. එක්තරා ක්‍රීඩා පාසලක ක්‍රීඩා පුහුණුව ලබන සෑම ශිෂ්‍යයෙක්ම, ක්‍රිකට්, පාපන්දු හා අත්පන්දු යන ක්‍රීඩා එකකට හෝ කීපයකට සහභාගී වේ. එම අය පිළිබඳ තොරතුරු වෙන් රූපයේ දැක්වේ.



(i) මෙම ක්‍රීඩා තුනම කරන සිසුන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(ii) ක්‍රිකට් ක්‍රීඩාවට පමණක් සහභාගී වන සිසුන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?
(iii) අඳුරු කළ පෙදෙසින් දැක්වෙන්නේ කුමන ක්‍රීඩා කරන අය දැයි සඳහන් කර එය කුලක අංකනයෙන් දක්වන්න.
(iv) අත්පන්දු ක්‍රීඩා කරන අය 25ක් නම් අඳුරු කළ පෙදෙසේ සිටින ක්‍රීඩකයන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

5. ගුරු පුහුණු විද්‍යා පීඨයක් සඳහා එක් වර්ෂයක දී සිසුන් 400ක් බඳවා ගන්නා ලදී. එම පීඨයෙහි ඉගැන්වෙන ගණිතය, විද්‍යාව හා ශාරීරික අධ්‍යාපනය යන සෑම පාඨමාලාවක් ම සිංහල හා ඉංග්‍රීසි යන මාධ්‍ය දෙකෙන් ම පැවැත්වේ.

(*a*) දී ඇති වෙන් රූපයේ පහත දැක්වෙන තොරතුරු අදාළ ස්ථානවල සටහන් කරමින් වෙන් රූපය සම්පූර්ණ කරන්න.



(i) විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ 140ක් සිටින අතර ඉන් 100ක් සිංහල මාධ්‍ය පාඨමාලාව හදාරති.
(ii) 40ක් ඉංග්‍රීසි මාධ්‍ය ගණිතය පාඨමාලාව හදාරති.
(iii) 110ක් ඉංග්‍රීසි මාධ්‍යයේ පාඨමාලා හදාරති.
(iv) ගණිතය පාඨමාලාව හදාරණ මුළු සංඛ්‍යාව 175කි.

(b)

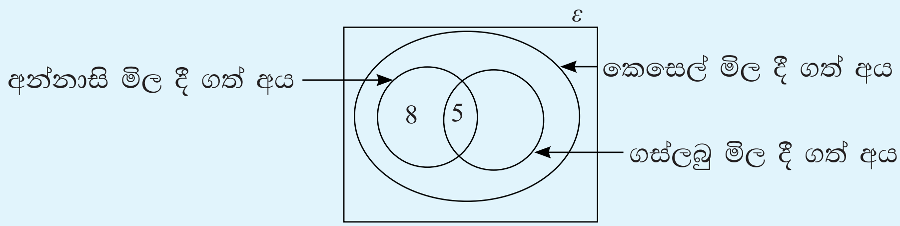
(i) සිංහල මාධ්‍ය විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(ii) ඉංග්‍රීසි මාධ්‍ය විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(iii) සිංහල මාධ්‍ය ගණිතය පාඨමාලාව හදාරණ සිසුන් සංඛ්‍යාව කීය ද?

(iv) අහඹු ලෙස තෝරාගත් සිසුවකු සිංහල මාධ්‍ය විද්‍යා පාඨමාලාව හදාරණ සිසුවකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

6. එක් දිනක පලතුරු වෙළෙඳසැලකට පලතුරු මිල දී ගැනීමට පැමිණි පිරිසක් මිල දී ගත් පලතුරු වර්ග පිළිබඳ තොරතුරු පහත වෙන් රූප සටහනේ දැක්වේ. එදින අන්නාසි හෝ ගස්ලබු හෝ මිල දී ගත් සියලු දෙනාම කෙසෙල් මිල දී ගන්නා ලදී.



(i) අන්නාසි මිල දී ගත් පිරිස කොපමණ ද?

(ii) ගස්ලබු මිල දී ගත් අය 12 දෙනෙක් නම් ගස්ලබු පමණක් මිල දී ගත් අය කොපමණ ද?

(iii) කෙසෙල් මිල දී ගත් අය 40 දෙනෙක් නම් කෙසෙල් පමණක් මිල දී ගත් අය කොපමණ ද?

(iv) ඉහත ද්‍රව්‍ය කිසිවක් මිල දී නොගත් අය 10 දෙනෙක් නම් එදින පලතුරු මිල දී ගැනීමට පැමිණි පිරිස කොපමණ ද?

(v) පැමිණි මුළු පිරිසෙන් කී දෙනෙක් පලතුරු වර්ග දෙකක් පමණක් මිලදී ගත්තේ ද?

(vi) පැමිණි පිරිසෙන් අහඹු ලෙස එක් අයෙකු තෝරා ගතහොත් ඔහු වර්ග තුනම මිලදී ගත් අයෙකු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

25 සම්භාවිතාව

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,

- සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් පියවර දෙකකින් යුක්ත වන විට ලැබෙන සිද්ධි ආශ්‍රිත ගැටලු විසඳීම සඳහා
  (i) කොටු දැල
  (ii) රුක් සටහන

යොදා ගැනීමට හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

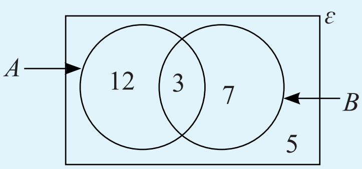
10 ශ්‍රේණියේ දී ඔබ උගත් කරුණු සිහිපත් කර ගැනීම සඳහා පහත දැක්වෙන අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් S නියැදි අවකාශයක් තුළ වූ සිද්ධියක් A වේ. $n(A) = 23$, $n(S) = 50$ නම්,
 (i) $P(A)$
 (ii) $P(A')$
සොයන්න.

2. සසම්භාවි පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශය $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ වේ. මෙහි ප්‍රතිඵල සමසේ භව්‍ය වේ යැයි උපකල්පනය කර පහත දැක්වෙන ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.
 (i) A යනු S තුළ වූ සරල සිද්ධියකි. A ලෙස ගත හැකි සිද්ධි සියල්ල ම ලියා දක්වන්න.
 (ii) එම එක් එක් සිද්ධිය සඳහා $P(A)$ සොයන්න.
 (iii) B යනු S තුළ වූ අවයව 4ක් ඇතුළත් සංයුක්ත සිද්ධියකි. B ලෙස ගත හැකි එක් සිද්ධියක් ලියා දක්වන්න.
 (iv) $P(B)$ හා $P(B')$ සොයන්න.
 (v) X යනු මෙම නියැදි අවකාශය තුළ වූ $P(X) = 0.5$ වන සිද්ධියකි. X ලෙස ගත හැකි සිද්ධි දෙකක් ලියා දක්වන්න.

3. දී ඇති වෙන් සටහනෙන් දැක්වෙන්නේ සසම්භාවී පරීක්ෂණයක S නියැදි අවකාශයක් තුළ වූ A හා B සිද්ධි දෙකෙහි එක් එක් පෙදෙසට අයත් අවයව ගණනයි.
 (a) පහත දැක්වෙන දෑ සොයන්න.



 (i) $n(S)$ (ii) $P(A)$ (iii) $P(B)$
 (iv) $P(A \cap B)$ (v) $P(A \cup B)$ (vi) $P(A \cap B')$
 (vii) $P(A' \cap B)$ (viii) $P(A \cup B)'$

4. 1 සිට 3 දක්වා අංක යෙදූ සමාන ප්‍රමාණයේ කාඩ්පත් තුනක් අතුරින් එකක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන එහි අංකය ඔත්තේ ද නැතිනම් ඉරට්ට ද යන්න පිරික්සා එය ආපසු මල්ලට දමනු ලැබේ. ඉන්පසු තවත් කාඩ්පතක් අහඹු ලෙස ගෙන එහි අංකය ඔත්තේ ද ඉරට්ට ද යන්න පිරික්සනු ලැබේ.

(i) නියැදි අවකාශය S නම් එය කුලකයක් ලෙස ලියා $n(S)$ ලියා දක්වන්න.

(ii) A යනු වාර දෙකේ දී ම ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සිද්ධිය නම්, A කුලකයක් ලෙස ලියා $n(A)$ ලියා දක්වන්න.

(iii) එමගින් $P(A)$ සොයන්න.

(iv) S නියැදි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.

(v) B යනු එක් වාරයක දී පමණක් ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සිද්ධිය නම් අයත් ලක්ෂ කොටු කර දක්වා $P(B)$ සොයන්න.

(vi) S නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වා එමගින්, අඩු තරමින් එක් වාරයක දී වත් ඉරට්ට සංඛ්‍යාවක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

25.1 ස්වායත්ත සිද්ධි හා පරායත්ත සිද්ධි

(i) ස්වායත්ත සිද්ධි

එක් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ නොවීම තවත් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ නොවීම කෙරෙහි බලනොපායි නම්, එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් ලෙස හැඳින්වෙන බව අපි 10 ශ්‍රේණියේ දී ඉගෙන ගතිමු. A හා B ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකක් නම් $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ වන බව ද අපි දනිමු. එවැනි සිද්ධි දෙකක් සඳහා නිදසුනක් පහත දැක්වේ.

කාසි දෙකක් එකවර උඩ දමා වැටෙන පැත්ත පරීක්ෂා කිරීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණය සලකමු. එක් කාසියක වැටෙන පැත්ත අනෙක් කාසියේ වැටෙන පැත්ත කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති නොකරන බව අපට පැහැදිලි ය. එබැවින් එක් කාසියක යම් පැත්තක් ලැබීම අනෙක් කාසියේ යම් පැත්තක් ලැබීමෙන් ස්වායත්ත වේ.

පරායත්ත සිද්ධි

එක් සිද්ධියක සිදුවීම් හෝ නොවීම තවත් සිද්ධියක සිදුවීම හෝ නොවීම කෙරෙහි බලපෑමක් ඇති කරයි නම් එම සිද්ධි දෙක පරායත්ත වේ. එනම් එක් සිද්ධියක් සිදුවීම හෝ නොවීම මත අනෙක් සිද්ධිය සිදුවීමේ හෝ නොවීමේ සම්භාවිතාවයේ වෙනසක් ඇති වෙයි.

පහත දැක්වෙන නිදසුන් අධ්‍යයනයෙන් පරායත්ත සිද්ධි පිළිබඳ ඔබගේ අවබෝධය පුළුල් කර ගන්න.

a. ක්‍රිකට් කණ්ඩායමක දක්ෂත ම පන්දු යවන්නා තරගයකට ඉදිරිපත් වීම හෝ නොවීම මත එම කණ්ඩායම ජයග්‍රහණය කිරීමේ සම්භාවිතාවේ වෙනසක් ඇති කරයි. එබැවින් දක්ෂත ම පන්දු යවන්නා තරගයට ඉදිරිපත් වීම සහ තරගය ජයග්‍රහණය කිරීම යන සිද්ධි දෙක පරායත්ත වේ.

b. ගැහැණු හා පිරිමි සතුන් සිටින ගව ගාලකින් අහඹු ලෙස එක් ගවයෙක් තෝරා ගතහොත් එම සතා ගැහැණු වුවහොත් කිරි ලබා ගත හැකි විය හැකි අතර ගැහැණු නොවුවහොත් ස්ථිර වශයෙන් ම කිරි ලබා ගත නොහැකි වේ. එබැවින් තෝරා ගත් ගවයා ගැහැණු වීම සහ ගවයකුගෙන් කිරි ලබාගත හැකි වීම යන සිද්ධි දෙක පරායත්ත වේ.

c. මල්ලක එකම තරමේ සුදු බෝල 7ක් සහ කලු බෝල 3ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස බෝලයක් තෝරා එහි වර්ණය සටහන් කර ගෙන එය ආපසු නොදමා දෙවැන්නක් ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කිරීමේ සසම්භාවී පරීක්ෂණය සලකමු. පළමු බෝලය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්න ගන්නා නිසා දෙවන බෝලය ගන්නා විට මල්ලේ ඉතිරි ව ඇත්තේ මුළු බෝල 10 අතුරින් 9කි. ඒ ඒ වර්ණයෙන් ඉතිරි වන බෝල ගණන, පළමු ව ගත් බෝලයේ වර්ණය මත රඳා පවතී.

පළමු බෝලය සුදු වූයේ නම් දෙවන බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

පළමු බෝලය සුදු නොවුනා නම් දෙවන බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{7}{9}$

මෙම සම්භාවිතා දෙක අසමාන නිසා පළමු බෝලය සුදු වීම සහ දෙවන බෝලය සුදුවීම යන සිද්ධි දෙක පරායත්ත වන බව නිගමනය කළ හැකි ය.

25.2 කොටු දැල භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

පියවර දෙකකින් සමන්විත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක එක් පියවරක සිදුවීමක් අනෙක් පියවරෙහි සිදුවීමකින් ස්වායත්ත වන්නට හෝ පරායත්ත වන්නට පුළුවන. එසේ ස්වායත්ත වන අවස්ථාවේ දී ගැටලු විසඳීම 10 ශ්‍රේණියේ දී සාකච්ඡා කළෙමු. එය පුනරීක්ෂණය කර ගැනුමට පහත නිදසුන අධ්‍යයනය කරන්න.

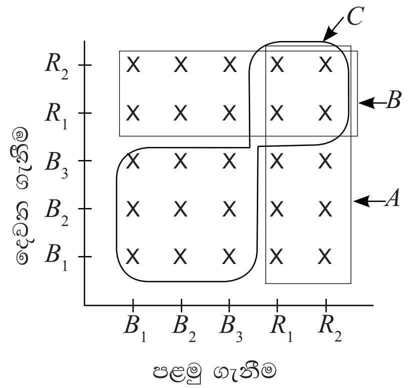
නිදසුන 1

මල්ලක එකම තරමේ නිල් පාට බෝල 3ක් ද, රතු පාට බෝල 2ක් ද ඇත. අහඹු ලෙස මින් එක් බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය සටහන් කොට ගෙන ආපසු මල්ලට දමා දෙවැන්නක් ද ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කෙරේ.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.
(ii) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(a) පළමු බෝලය රතු පාට වීම
(b) දෙවන බෝලය රතු පාට වීම
(c) බෝල දෙකම රතු පාට වීම
(d) බෝල දෙක එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීම
(e) අඩු වශයෙන් එක් බෝලයක්වත් රතු පාට වීම

(i) සම්භාවිතා ගැටලු විසඳීමට කොටු දැල යොදා ගන්නා විට, විය හැකි සියලු ප්‍රතිඵල කුලකය හෙවත් නියැදි අවකාශය සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵලවලින් යුක්ත විය යුතු බව මීට පෙර අප ඉගෙන ඇත. බෝල තරමින් සමාන නිසා ඕනෑම බෝලයක් ලැබීමට ඇති සම්භාවිතාව එකම වේ. එබැවින් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක දක්වා අවශ්‍ය සම්භාවිතා සෙවිය හැකි ය. නිල් බෝල තුන B_1, B_2, B_3 ලෙස ද රතු බෝල දෙක R_1, R_2 ලෙස ද දක්වමු.



පළමු ගැනීමේ දී විය හැකි ප්‍රතිඵල තිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද දෙවන ගැනීමේ දී විය හැකි ප්‍රතිඵල සිරස් අක්ෂය ඔස්සේ ද ගෙන ලකුණු කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යවලින් නියැදි අවකාශය සමන්විත වේ.

පළමු ව ගත් බෝලය ආපසු දමා දෙවැන්න ගෙන පරීක්ෂා කරන බැවින් පළමු සිදුවීම හා දෙවන සිදුවීම එකිනෙකින් ස්වායත්ත වේ.

කොටු දැල ඇසුරෙන් යම් සිද්ධියක සම්භාවිතාව සෙවීමේ දී ඇති සිද්ධියට අදාළ ලක්ෂ්‍ය ගණන, නියැදි අවකාශයේ ඇති මුළු ලක්ෂ්‍ය ගණනින් බෙදනු ලබයි.

(ii) පළමු බෝලය රතු පාට වීමේ සිද්ධියට අදාළ ලක්ෂ්‍ය දැලිසෙහි කොටු කර A ලෙස දක්වා ඇත. එහි ලක්ෂ්‍ය 10ක් ඇත. නියැදි අවකාශය තුළ ලක්ෂ්‍ය 25ක් ඇත.

$\therefore$ පළමු බෝලය රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{A \text{ කොටුව තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(b) දෙවන බෝලය රතු පාට වීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය කොටු කර B ලෙස දක්වා ඇත.

ඒ අනුව,

දෙවන බෝලය රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{B \text{ කොටුව තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$

$$= \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(c) බෝල දෙකම රතු පාට වීමේ සිද්ධිය අදාළ ලක්ෂ්‍ය වන්නේ A හා B යන කොටු දෙකට පොදු ලක්ෂ්‍යය යි. එහි ලක්ෂ්‍ය 4ක් ඇත.

$$\therefore \text{ බෝල දෙකම රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව} = \frac{\text{කොටු දෙකටම පොදු ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$$

$$= \frac{4}{25}$$

(d) බෝල දෙක ම එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීමට දෙකම නිල් හෝ දෙකම රතු පාට විය යුතු ය. ඊට අදාළ ලක්ෂ C පෙදෙසේ දක්වා ඇත. එහි ඇති ලක්ෂ ගණන 13කි.

$$\therefore \left.\begin{array}{r}\text{බෝල දෙකම එකම වර්ණයෙන්} \\ \text{යුක්ත වීමේ සම්භාවිතාව}\end{array}\right\} = \frac{C \text{ පෙදෙස තුළ ලක්ෂ්‍ය ගණන}}{\text{නියැදි අවකාශය තුළ ඇති ලක්ෂ්‍ය ගණන}}$$

$$= \frac{13}{25}$$

(e) අඩු වශයෙන් එක් බෝලයක්වත් රතු පාට වීම යනු නම් එකක් හෝ දෙකම රතු පාට වීමයි. ඊට අදාළ වන්නේ A හා B යන කොටු දෙක තුළ ඇති සියලුම ලක්ෂ්‍යයි. එහි ලක්ෂ 16ක් ඇති නිසා,

අඩු වශයෙන් එක් බෝලයක්වත් රතු පාට වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{16}{25}$

දැන්, පරායත්ත සිද්ධි අඩංගු පියවර දෙකකින් සමන්විත සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් හා ඊට අදාළ සම්භාවිතා ගණනය කරන අයුරු නිදසුනක් ඇසුරෙන් සලකා බලමු.

නිදසුන 2

සිතිජගේ පැන්සල් පෙට්ටියේ රතු පැන්සල් 2ක් ද, නිල් පැන්සල් 3ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස එක් පැන්සලක් ගෙන තම මිතුරියක වන තමිලිනීට දෙයි. ඉන්පසු සිතිජ තමාට ද පැන්සලක් අහඹු ලෙස ගනී.

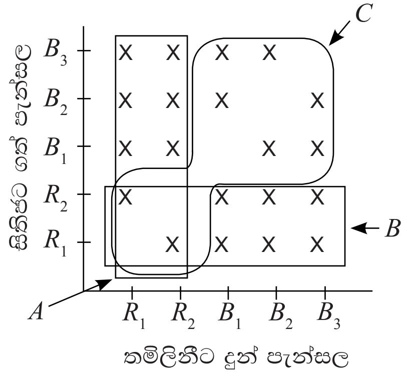
(i) නියැදි අවකාශය අවයව ඇසුරෙන් ලියා දක්වා කොටු දැලක එය දක්වන්න.
(ii) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(a) තමිලිනීට රතු පැන්සලක් දීම
(b) සිතිජට රතු පැන්සලක් ලැබීම
(c) දෙදෙනාට ම එකම වර්ණයෙන් ලැබීම
(d) තමිලිනීට පමණක් රතු පැන්සලක් ලැබීම

(i) රතු පැන්සල් දෙක R_1 හා R_2 ලෙස ද නිල් පැන්සල් තුන B_1, B_2 හා B_3 ලෙස ද ගනිමු. තමිලිනීට දුන් පැන්සල R_1, R_2, B_1, B_2 හා B_3 අතරින් එකක් ද, සිතිජට ගත් පැන්සල ද ඒ අතුරින් එකක් විය යුතු ය. එහෙත් තමිලිනීට දෙන පැන්සල සිතිජට ලැබිය නොහැකි නිසා

$(R_1, R_1), (R_2, R_2), (B_1, B_1), (B_2, B_2)$ හා (B_3, B_3) ලක්ෂ්‍යවලට අදාළ සිදුවීම් විය නොහැකි ය. එබැවින් එම ලක්ෂ්‍ය 5 හැර ඉතිරි ලක්ෂ්‍ය 20 පමණක් නියැදි අවකාශයට අයත් වේ. ඒ අනුව, අදාළ නියැදි අවකාශය ද

$\{ (R_1, R_2), (R_1, B_1), (R_1, B_2), (R_1, B_3), (R_2, R_1), (R_2, B_1)... \}$ ලෙස දැක්විය හැකි ය. එය කොටු දැලක පහත රූපයේ පරිදි දැක්විය හැකිය.



(a) තම්ලිනීට රතු පැන්සලක් දීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය 8ක් A කොටුව තුළ ඇත.

$\therefore$ තම්ලිනීට රතු පැන්සලක් දීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

(b) සිතිජට රතු පැන්සලක් ලැබීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය 8 B කොටුවේ ඇත.

$\therefore$ සිතිජට රතු පැන්සලක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

(c) දෙදෙනාටම එකම වර්ණයෙන් යුත් පැන්සලක් ලැබීමට අදාළ ලක්ෂ්‍ය C පෙදෙසේ ඇත. එකම වර්ණය ලැබීම යනු දෙදෙනාටම රතු හෝ දෙදෙනාටම නිල් ලැබීමය. එහි දී ඇත්තේ ලක්ෂ්‍ය 8කි.

$\therefore$ දෙදෙනාටම එකම වර්ණයෙන් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

(d) තම්ලිනීට පමණක් රතු පැන්සලක් ලැබීමට නම් තම්ලිනීට රතු හා සිතිජට නිල් ලැබිය යුතු ය. එවැනි ලක්ෂ්‍ය 6ක් ඇත.

$\therefore$ තම්ලිනීට පමණක් රතු පැන්සලක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

25.1 අභ්‍යාසය

1. පෙට්ටියක එකම තරමේ සුදු බෝල 2ක් හා රතු බෝල 4 ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස එක් බෝලයක් ඉවතට ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කෙරේ.

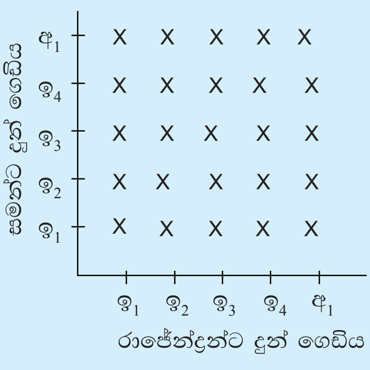
(a) විය හැකි සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් S නියැදි අවකාශය ලියා දක්වන්න.

(b) පළමුව ගත් බෝලය ආපසු මල්ලට දමා තවත් බෝලයක් අහඹු ලෙස ඉවතට ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කරයි නම්, සමසේ භව්‍ය සරල සිද්ධි ඇතුළත් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක දක්වන්න.

(c) පළමුව ගත් බෝලය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්නක් අහඹු ලෙස ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කරන්නේ නම් නියැදි අවකාශය කොටු දැලක දක්වන්න.

(d) වාර දෙකේ දී ගත් බෝල දෙක එකම වර්ණයෙන් යුක්ත වීමේ සම්භාවිතාව ඉහත (b) හා (c) අවස්ථා දෙක සඳහා වෙන වෙන ම සොයන්න.

2. මල්ලක එකම තරමේ ඉදුණු අඹ ගෙඩි 4 ක් සහ අමු අඹ ගෙඩි 1 ක් ඇත. අහඹු ලෙස මින් එක් ගෙඩියක් ගත් සමන් එය තම මිතුරකු වූ රාජේන්ද්‍රන්ට දෙන ලදි. ඉන්පසු සමන්ට ද ගෙඩියක් අහඹු ලෙස ගන්නා ලදී. මේ සඳහා සමන් විසින් පිළියෙල කරන ලද සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් නියැදි අවකාශයය පහත දැක්වේ.



(a) මෙම කොටු දැලේ දෝෂයක් ඇත. එය නිවැරදි කොට නැවත සකස් කරන්න.

(b) නිවැරදි කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.

(i) දෙදෙනාටම ඉදුණු ගෙඩි ලැබීම.
(ii) රාජේන්ද්‍රන්ට පමණක් ඉදුණු ගෙඩියක් ලැබීම.
(iii) එක් අයෙකුට පමණක් ඉදුණු ගෙඩියක් ලැබීම.

(c) මෙහි දී අඩු වශයෙන් එක් අයෙකුටවත් ඉදුණු එකක් ලැබීම ස්ථිරවම සිදුවන බව රාජේන්ද්‍රන් ප්‍රකාශ කරයි. මෙහි සත්‍ය අසත්‍යතාව හේතු සහිතව පහදන්න.

3. චාරිකාවක් යාමට සුදානම් වූ සරත් තම ඇඳුම් පෙට්ටියේ වූ සුදු කමිස 4 ක් ද, කළු කමිස 3 ක් ද අතුරින් කමිස දෙකක් (එකකට පසු එකක් වශයෙන්) අහඹු ලෙස තෝරා ගන්නා ලදී.

(a) සුදු කමිස හතර W_1, W_2, W_3, W_4 ලෙස ද කළු කමිස තුන B_1, B_2, B_3 ලෙස ද ගෙන නියැඳි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.

(b) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) කමිස දෙකම සුදු වීම
(ii) එක් කමිසයක් පමණක් සුදු වීම
(iii) අඩු තරමින් එකක්වත් සුදු වීම

4. බඳුනක එකම තරමේ හා හැඩයෙන් යුත් කිරි රස ටොෆි 3 ක් ද, දොඩම් රස ටොෆි 2 ක් ද. සියඹලා රස ටොෆි 1 ක් ද ඇත. සඳරු මින් එක් ටොෆියක් අහඹු ලෙස ගෙන රස කර බැලුවාය. අනතුරුව තම යෙළියක වන ජෙසීට ද අහඹු ලෙස ගත් එකක් ප්‍රදානය කළා ය.

(a) ටොෆි රස සැලකිල්ලට ගෙන සමසේ භව්‍ය ප්‍රතිඵල ඇතුළත් නියැඳි අවකාශය කොටු දැලක නිරූපණය කරන්න.

(b) කොටු දැල ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන එක් එක් සිද්ධියේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(i) දෙදෙනාටම එකම රසැති ටොෆි දෙකක් ලැබීම.
(ii) එක් අයෙකුට පමණකත් කිරි රසැති ටොෆියක් ලැබීම.
(iii) ජෙසීට සියඹලා රස ටොෆියක් ලැබීම.

25.2 රුක් සටහනක් භාවිතයෙන් ගැටලු විසඳීම

සසම්භාවී පරීක්ෂණයක් පියවර කිහිපයකින් යුක්ත වන විට එම පරීක්ෂණයට අදාළ සිද්ධිවල සම්භාවිතා සෙවීමට රුක් සටහනක් භාවිතා කළ හැකි ය. අප මෙම පාඩමේ දී පියවර දෙකක් ඇති සසම්භාවී පරීක්ෂණ පමණක් සලකා බලමු. පහත නිදසුන් ඇසුරෙන් ඒ පිළිබඳ ව අධ්‍යයනය කරන්න.

සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත වන අවස්ථාව ඔබ මීට පෙර 10 වසරේ දී උගෙන ඇත. එය පුනරීක්ෂණය සඳහා නිදසුනක් පහත දැක්වේ.

නිදසුන 1

මල්ලක එකම තරමේ සුදු පාට බෝල දෙකක් ද කලු පාට බෝලයක් ද ඇත. මින් අහඹු ලෙස එක් බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය පරීක්ෂා කෙරෙයි. ඉන්පසු එය ආපසු මල්ලට දමා නැවත බෝලයක් ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කෙරෙයි.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(ii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සිද්ධිවල සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) පළමු ව සුදු බෝලයක් ද දෙවනුවට ද සුදු බෝලයක් ලැබීම

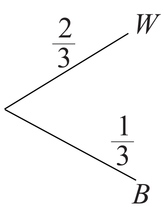
(b) පළමු ව සුදු බෝලයක් ලැබීම

(c) සුදු බෝල එකක් පමණක් ලැබීම

(d) අඩු තරමින් එක් සුදු බෝලයක්වත් ලැබීම

(i) සුදු බෝලයක් ලැබීමේ සිද්ධිය W මගින් ද, කළු බෝලයක් ලැබීමේ සිද්ධිය B මගින් ද දක්වමු. ප්‍රතිඵල සමසේ භව්‍ය නිසා, පළමු ව ගත් බෝලය සුදු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{2}{3}$ ද එය කලු වීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ ද වේ. පළමු ගැනීමට අදාළ රුක් සටහන් කොටසේ ශාඛා මත අදාළ සම්භාවිතා සටහන් කරමු.

<u>පළමු ගැනීම</u>

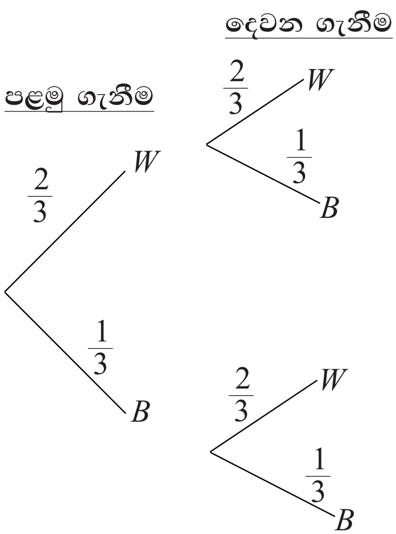


මෙම ශාඛා දෙක මත ඇති සම්භාවිතාවල ඓක්‍යය $= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

$= 1$ බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

සටහන: රුක් සටහනක එක් තැනකින් විහිදෙන ශාඛා මත ඇති සම්භාවිතාවල එකතුව 1 විය යුතු ය.

දැන් සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ දෙවන පියවර දක්වා ඉහත රුක් සටහන දීර්ඝ කරමු.



පළමු ගත් බෝලය ආපසු මල්ලට දමා දෙවන බෝලය ගන්නා බැවින් දෙවන බෝලය ගන්නා විට ද මල්ලේ ඇති බෝල ගණන් වෙනස් නොවේ. එබැවින් දෙවනුව ගත් බෝලයක් සුදු වීමට හෝ කලු වීමට අදාළ සම්භාවිතා පළමු අවස්ථාවේ අගයන් ම ගනී. එම අගයන් අදාළ ශාඛා මත දක්වා ඇත.

මේ අවස්ථාවේ දී එක් තැනකින් විහිදෙන ශාඛා මත ඇති සම්භාවිතාවන්ගේ ඓක්‍යය ද 1 වන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

(ii) අවස්ථා දෙකම සැලකිල්ලට ගත් විට විය හැකි සිදුවීම් හතරක් ඇත. ඒවා පහත වගුවේ අදාළ සම්භාවිතා ද සමග දැක්වේ.

සිදුවීම	**සම්භාවිතාව**	
(W, W)	$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
(W, B)	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, W)	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
(B, B)	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

නිදසුනක් ලෙස මෙහි (W, W) මගින් පළමු බෝලය සුදු වී දෙවැන්න ද සුදු වීමේ සිද්ධිය දක්වයි. එම සිද්ධියේ සම්භාවිතාව $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ වේ. මෙසේ ගුණ කිරීමට හේතුව එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත වීමයි. මෙලෙස ගෙන ඇති (W, W), (W, B), (B, W) හා (B, B) සිද්ධි හතර අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ. ඊට හේතුව වන්නේ මෙම සිද්ධි අතරින් ඕනෑම දෙකක් ගතහොත් එම සිද්ධි දෙක එකවර සිදු විය නොහැකි වීම යි. අදාළ සිද්ධීන්ගේ සම්භාවිතා පහත දැක්වෙන පරිදි ගණනය කළ හැකි ය.

(a) පළමු ව සුදු බෝලයක් ද දෙවනුව ද සුදු බෝලයක් ද ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(W, W)$$
$$= \frac{4}{9} \text{ (වගුව ඇසුරෙන්)}$$

(b) පළමුව සුදු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(W, W) + P(W, B)$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(c) සුදු බෝල 1ක් පමණක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(W, B) + P(B, W)$

$$= \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

(d) අඩු තරමින් එක් සුදු බෝලයක්වත් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(W, W) + P(W, B) + P(B, W)$

$$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{2} = \frac{8}{9}$$

සටහන: (d) කොටසේ පිළිතුර $1 - P(B, B)$ ලෙස ද ලබා ගත හැකි ය.

සිද්ධි දෙක පරායත්ත වන අවස්ථාවට නිදසුනක් පහත දක්වමු.

නිදසුන 2

මල්ලක එකම තරමේ රතු බෝල 3ක් හා නිල් බෝල 2ක් ඇත. මින් අහඹු ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන එහි වර්ණය පරීක්ෂා කර එය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්නක් ගෙන වර්ණය පරීක්ෂා කරයි.

(i) අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

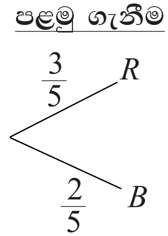
(ii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සිද්ධිවල සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) අවස්ථා දෙකේ දී ම රතු බෝලයක් ලැබීම

(b) එක් අවස්ථාවක දී පමණක් රතු බෝලයක් ලැබීම

(c) අඩු තරමින් එක් අවස්ථාවක දී වත් රතු බෝලයක් ලැබීම

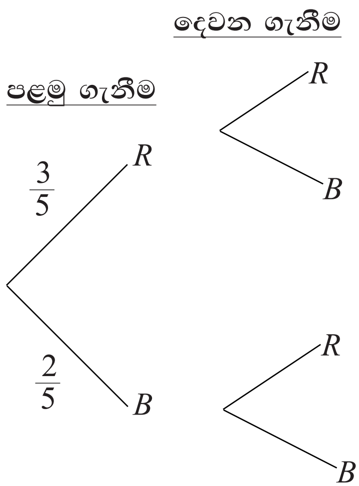
(i) රුක් සටහනේ මුල් කොටස පහත දැක්වේ.



මෙහි R මගින් රතු බෝලයක් ලැබීම ද B මගින් නිල් බෝලයක් ලැබීම ද දැක්වේ. මල්ලේ රතු බෝල 3ක් ද නිල් බෝල 2ක් ද ඇති නිසා,

$P(R) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$ වේ.

දැන් රුක් සටහනේ මුල් කොටස දීර්ඝ කිරීමෙන් දෙවන ගැනීමට අදාළ සිදුවීම් දක්වමු.



ඉහත රුක් සටහනේ දෙවන පියවරට අදාළ සම්භාවිතා සෙවූ අයුරු මෙසේ විස්තර කළ හැකි ය.

මෙම කොටසේ ශාඛා මත දක්වන සම්භාවිතා මුල් කොටසේ අගයන්ගෙන් වෙනස් වේ. එසේ වන්නේ පළමු සිදුවීම සලකා දෙවන සිදුවීමට අදාළ සම්භාවිතා සෙවිය යුතු නිසා ය. පළමු බෝලය රතු වූවා නම්, මල්ලේ ඉතිරි වන්නේ රතු බෝල 2ක් හා නිල් බෝල 2කි.

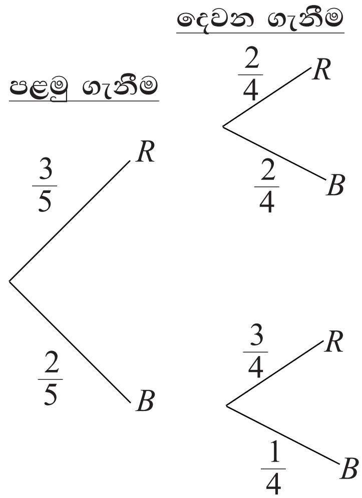
$\therefore$ දෙවැන්න රතු වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{2}{4}$

දෙවැන්න නිල් වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{2}{4}$

පළමු බෝලය නිල් වූවා නම්, මල්ලේ ඉතිරි වන්නේ රතු බෝල 3ක් හා නිල් බෝල 1කි.

$\therefore$ දෙවැන්න රතුවීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{3}{4}$

දෙවැන්න නිල්වීමේ සම්භාවිතාව $= \dfrac{1}{4}$



මෙම සම්භාවිතාවන් රුක් සටහනේ අදාළ ශාඛා මත සටහන් කර සිදුවීම් වගුව සම්පූර්ණ කරමු. එම සිද්ධීන් හතරේ සම්භාවිතාවන්ගේ එකතුව 1 වන බව තහවුරු කර ගන්න.

සිදුවීම	සම්භාවිතාව	
(R, R)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(R, B)	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, R)	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$	$\frac{6}{20}$
(B, B)	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$	$\frac{2}{20}$

වගුවෙහි, නිදසුනක් ලෙස (R, R) සිද්ධියට (එනම්, මුලින් රතු බෝලයක් ලැබීම හා දෙවනුවත් රතු බෝලයක් ලැබීම යන සිද්ධියට) අදාළ සම්භාවිතාව ගණනය කර ඇත්තේ අදාළ සම්භාවිතා ගුණ කිරීමෙනි. එසේ නමුත් එම සිද්ධි දෙක ස්වායත්ත නොවේ. එයට හේතුව, මුලින් ගන්නා බෝලයෙහි වර්ණය රතු වීම හෝ නොවීම අනුව දෙවනුව ගන්නා බෝලය රතු වීමේ සම්භාවිතාව වෙනස් වන නිසා ය. එසේ නමුත් දෙවනුව ගන්නා බෝලයෙහි වර්ණය රතු වීමේ සම්භාවිතාව සෙවීමේ දී පළමුව ගත් බෝලයෙහි වර්ණය රතු ලෙස ගෙන ඇති නිසා මෙසේ (R, R) හි සම්භාවිතා සෙවීමේ දී අදාළ සම්භාවිතා ගුණ කළ හැකි ය.

මෙම වගුවේ දැක්වෙන $(R,R), (R,B), (B,R), (B,B)$ සිදුවීම් අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර වේ. එබැවින් රුක් සටහන ඇසුරෙන් යම් සිද්ධියක සම්භාවිතාව සෙවීමට අප කළ යුතු වන්නේ වගුව තුළින් ඊට අදාළ සිදුවීම් තෝරා ගෙන එම සිද්ධිවල සම්භාවිතාවන්ගේ එකතුව ලබා ගැනීමයි.

(a) අවස්ථා දෙකේ දී ම රතු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව $= P(R, R)$

$$= \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(b) එක් අවස්ථාවක දී පමණක් රතු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(R, B) + P(B, R)$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

(c) අඩු තරමින් එක් අවස්ථාවක දී වත් රතු බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව

$$= P(R, B) + P(B, R) + P(R, R)$$

$$= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

සටහන: (c) කොටසේ පිළිතුරු මෙය $1 - P(B, B)$ මගින් ද ලබා ගත හැකි ය.

25.2 අභ්‍යාසය

1. එකම වර්ගයේ බල්බ 10 ක් ඇති පෙට්ටියක බල්බ 3 ක් සදොස් බව දනියි. නිමල් පෙට්ටියෙන් එක් බල්බයක් අහඹු ලෙස ගෙන සදොස් දැයි පරීක්ෂා කොට එය ආපසු නො දමා දෙවැනි බල්බයක් අහඹු ලෙස ගෙන පරීක්ෂා කරයි.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(ii) පළමු ව සදොස් බල්බයක් ලැබීම හා දෙවනුව ද සදොස් බල්බයක් ලැබීම යන සිද්ධි යුගලය පරායත්ත වන බව නිමල් පවසයි. එහි සත්‍ය අසත්‍යතාව හේතු සහිතව පැහැදිලි කරන්න.

(iii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) ගත් බල්බ දෙකම සදොස් ඒවා වීම

(b) ගත් එක් බල්බයක් පමණක් සදොස් වීම

(c) යටත් පිරිසෙයින් එක් බල්බයක්වත් සදොස් වීම

2. පාපන්දු කණ්ඩායමක සිටින A නම් ක්‍රීඩකයෙක් එක්තරා තරගයකට ක්‍රීඩා කිරීමේ සම්භාවිතාව $\frac{3}{4}$ කි. A ක්‍රීඩකයා එම තරගයට ක්‍රීඩා කළහොත් තරගයෙන් ජය ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{5}{8}$ ක් වන අතර, ක්‍රීඩා නොකළහොත් ජය ලැබීම සහ පරාජය වීම සමසේ භව්‍ය වේ. මෙම තරගය ජය පරාජයෙන් තොරව නිම නොවේ.

(i) A නම් ක්‍රීඩකයා මෙම තරගයට ක්‍රීඩා නොකිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) A ක්‍රීඩකයා මෙම තරගයට ක්‍රීඩා නොකළහොත් ජය ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(iii) A ක්‍රීඩකයා ක්‍රීඩා කිරීම හා නොකිරීම පළමු කොටසට තරගයෙන් ජය ලැබීම හා පරාජය වීම දෙවන කොටසට ද ගෙන නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(iv) රුක් සටහන ඇසුරෙන් මෙම පාපන්දු කණ්ඩායම තරගයෙන් ජය ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(v) A ක්‍රීඩකයා මෙම තරගයට ක්‍රීඩා කිරීම වඩා වාසිදායක වන්නේ දැයි හේතු සහිත ව දක්වන්න.

3. මල්ලක එකම තරමේ ඉදුණු දිවුල් ගෙඩි 4ක් ද නොඉදුණු දිවුල් ගෙඩි 3ක් ද ඇත. නාමලී මින් එක් ගෙඩියක් අහඹු ලෙස ගෙන එය ඉදුණු එකක් නම් එය ආපසු මල්ලට නොදමා දෙවැන්නක් ගනු ලැබේ. එය නොඉදුණු එකක් නම් එය ආපසු මල්ලට දමා දෙවැන්නක් ගනු ලැබේ.

(i) මෙම සසම්භාවී පරීක්ෂණයේ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.

(ii) නාමලීගේ පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශයන්ගෙන් කුමන ඒවා සත්‍ය දැයි හේතු සහිතව දක්වන්න.

(a) "පළමු ව ගත් ගෙඩිය ඉදුණු එකක් වීම සහ දෙවනුව ගත් ගෙඩිය ඉදුණු එකක් වීම ස්වායත්ත සිද්ධි දෙකකි"

(b) "පළමු ව ගත් ගෙඩිය නොඉදුණු එකක් වීම හා දෙවනුව ගත් ගෙඩිය නොඉදුණු එකක් වීම පරායත්ත සිද්ධි දෙකකි".

(iii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.

(a) ගත් ගෙඩි දෙකම ඉදුණු ඒවා වීම

(b) දෙවනුව ගත් ගෙඩිය ඉදුණු එකක් වීම

(c) ගත් ගෙඩි දෙකින් එකක් පමණක් ඉදුණු ඒවා වීම

4. සිරිමල්ගේ ගවගාලේ පිරිමි සතුන් 5ක් ද ගැහැණු සතුන් 15ක් ද සිටී. නාදන්ගේ ගවගාලේ පිරිමි සතුන් 2ක් ද ගැහැණු සතුන් 8ක් ද සිටී. සිරිමල් හා නාදන් එක් සතෙකු බැගින් හුවමාරු කර ගැනීමට එකඟ විය. පළමු ව සිරිමල් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් සතෙක් නාදන්ට යැවූ පසු නාදන් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් සතෙක් සිරිමල්ට යවන ලදී.

(i) අදාළ නියැදි අවකාශය රුක් සටහනක දක්වන්න.
(ii) එය ඇසුරෙන් පහත දැක්වෙන සම්භාවිතා සොයන්න.
(a) හුවමාරුව නිසා සිරිමල්ගේ ගාලේ පිරිමි සතෙක් අඩු වීම
(b) හුවමාරුව නිසා සිරිමල්ගේ ගාලේ පිරිමි සතෙක් වැඩි වීම
(c) හුවමාරුව නිසා ගාල් දෙකෙහි පිරිමි හා ගැහැණු සතුන් ගණන වෙනස් නොවීම
(iii) ඉහත විස්තර කර ඇති ආකාරයට නොව වෙනත් ආකාරයකට ඔවුන් දෙදෙනා සතුන් හුවමාරු කළෝ ය. සිරිමල් හා නාදන් තම ගාල්වලින් සතෙක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන මිත්‍ර අබ්දුල්ගේ නිවසට ගොස් එහිදී සතුන් දෙදෙනා හුවමාරු කර ගෙන ගව ගාල්වලට මුදා හැරියේ නම් එම සසම්භාවී පරීක්ෂණයට අදාළ ව ඉහත (ii) කොටසේ අසා ඇති සම්භාවිතාව සොයන්න.

5. X හා Y යනු එකම රෝගයක් සඳහා දෙනු ලබන සඵලත්ව පිළිවෙළින් 90% හා 80%ක් වන ඖෂධ දෙකකි. එක් ඖෂධයකින් සුව නොවුනහොත් පමණක් අනෙක් ඖෂධය දෙනු ලැබේ. එය ද සාර්ථක නොවුනහොත් ශල්‍යකර්මයකට භාජනය කරනු ලැබේ.

(i) ඖෂධ වර්ග දෙකම ලබා දීමෙන් පසු රෝගය සුවවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(ii) රෝගියෙක් ශල්‍ය කර්මයකට යොමු කිරීමට සිදුවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(iii) මුලින් ම ලබා දෙන ඖෂධය X ද Y ද යන්න මත (ii) කොටසේ පිළිතුර වෙනස් වන ආකාරය පිළිබඳව සාකච්ඡා කරන්න

6. ආයතනයක සේවය කරනු ලබන ලිපිකාර තනතුර හා කම්කරු තනතුර දරන්නන්ගේ පුම්තිරි බව පහත වගුවේ දැක්වේ.

පුම්තිරිබව / තනතුර	පිරිමි	ගැහැණු	එකතුව
ලිපිකරු	5	8	13
කම්කරු	2	1	3
එකතුව	7	9	16

(i) මෙම ආයතනයෙන් අහඹු ලෙස තෝරා ගත් අයෙක්,

(a) කම්කරු තනතුරු දරන්නෙක් වීමේ
(b) ලිපිකාරිනියක වීමේ
(c) ගැහැණු අයෙක් වුණි නම් ඇය කම්කරු තනතුර දරන්නෙක් වීමේ
සම්භාවිතා සොයන්න.

(ii) මෙම ආයතනයෙන් අහඹු ලෙස ලිපිකාර තනතුර දරන්නෙකු හා කම්කරු තනතුර දරන්නෙක් තෝරා ගනී.

(a) විය හැකි සියලු ප්‍රතිඵල රුක් සටහනක දක්වන්න.
(b) ඒ ඇසුරෙන් තෝරා ගත් දෙදෙනා අතුරින් එක් අයෙක්වත් පිරිමි වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

7. පෙට්ටියක එකම තරමේ සුදු බෝල 2ක් ද, කලු බෝල 1ක් ද ඇත. මින් අහඹු ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගෙන එය ඉවතට දමා දෙවැන්නක් ගනු ලැබේ. මෙසේ ගත් බෝල දෙක අතරින් අඩු තරමින් එකක්වත් සුදු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

8. A නම් පෙට්ටියක එකම ප්‍රමාණයේ හා හැඩයේ නිල් පබළු 3 ක් ද රතු පබළු 2 ක් ද ඇත. B නම් පෙට්ටියේ එකම ප්‍රමාණයේ හා හැඩයේ නිල් පබළු 4 ක් ද රතු පබළු 5 ක් ද ඇත. A පෙට්ටියේ පබළු වක් ගෙන B පෙට්ටියට දමා B පෙට්ටියෙන් පබළුවක් ගෙන A පෙට්ටියට දමනු ලැබේ. එවිට A පෙට්ටියේ පබළුවල වර්ණ සංයුතිය වෙනස් නොවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

9. එක්තරා මහා විද්‍යාලයක 11 ශ්‍රේණියේ සමාන්තර පන්ති තුනක් ඇත. මෙම පන්ති තුනෙහි ශිෂ්‍ය සංඛ්‍යා 2: 2: 3 අනුපාතයට ඇත. පන්ති තුනට ගණිතය උගන්වන්නේ A, B හා C යන ගුරුවරු තිදෙනෙකි. විදුහල්පති තුමා තම විශ්වාසය මත පහත දැක්වෙන ප්‍රකාශය කරයි. " A උගන්වන පන්තියෙන් 90%ක් ද, B උගන්වන පන්තියෙන් 80% ක් ද C උගන්වන පන්තියෙන් 60% ක් ද, සිසුන් ඉදිරියේ පැවැත්වීමට නියමිත විභාගයෙන් සමත් වේ". මෙම ප්‍රකාශයට අනුව,

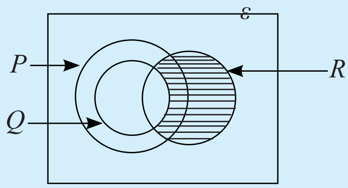
(i) එම පාසලේ 11 ශ්‍රේණියෙන් අහඹු ලෙස තෝරා ගන්නා සිසුවෙකු විභාගයෙන් සමත් අයෙක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.
(ii) ඉහත කොටසේ පිළිතුර මත සමත් ප්‍රතිශතය තක්සේරු කරන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාස - 3 වන වාරය

I කොටස

1. පහත දැක්වෙන අසමානතාව විසඳා, විසඳුම්, සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත ලකුණු කර දක්වන්න.

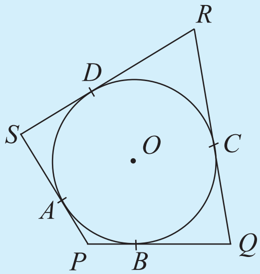
$2x + 5 \leq 15$

2. 

දී ඇති වෙන් රූප සටහනේ අඳුරු කොට ඇති ප්‍රදේශය කුලක අංකනයෙන් ලියා දක්වන්න.

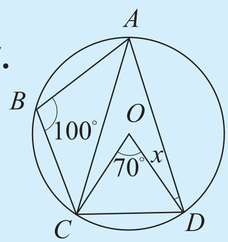
3. සෘජුකෝණික සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක කර්ණය මත ඇඳි සමචතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය 64 cm^2 වේ. ඉතිරි පාදයක් මත ඇඳි සමචතුරස්‍රයක වර්ගඵලය සොයන්න.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ q \end{pmatrix}$ නම් p හා q සොයන්න.

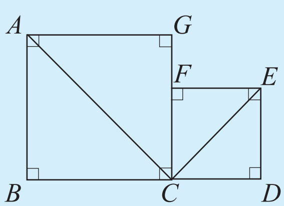
5. 

රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ පරිධිය මත පිහිටි A, B, C හා D ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක රූපයේ ආකාරයට P, Q, R හා S හි දී එකිනෙක හමු වේ. $PQ + SR = 20$ cm නම් $PQRS$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

6. A හා B යනු සසම්භාවී පරීක්ෂණයක සිද්ධි දෙකක් වන අතර $P(A) = 0.4$ ද $P(A \cup B) = 0.7$ ද වේ. A හා B ස්වායත්ත නම් $P(B)$ හි අගය සොයන්න.

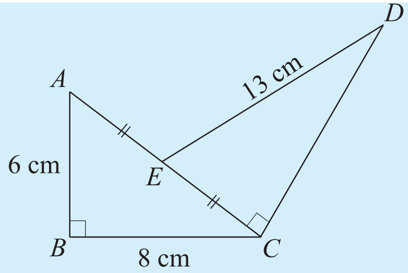
7. 

රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ $C\hat{O}D = 70^\circ$ ද $C\hat{B}A = 100^\circ$ ද වේ. $O\hat{D}A$ හි අගය සොයන්න.

8. 

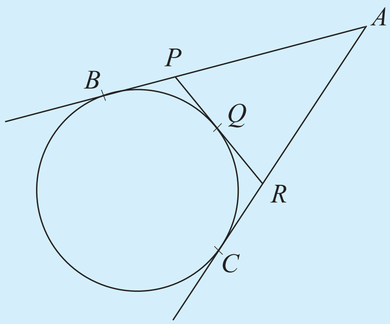
රූපයේ දැක්වෙන $ABCG$ හා $FCDE$ යනු සමචතුරස්‍ර වේ. $AC^2 = 12 \text{ cm}^2$ ද $CE^2 = 6 \text{ cm}^2$ නම් රූපයේ මුළු වර්ගඵලය සොයන්න.

9. රූපයේ දැක්වෙන ABC හා ECD සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ වේ. රූපයේ මුළු වර්ගඵලය සොයන්න.



10. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ නම් $-2A$ න්‍යාසය ලියා දක්වන්න.

11. දී ඇති රූපයේ, A සිට වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක යුගලය AB හා AC වේ. Q හි දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය AB හා AC පාද P හා R හිදී හමු වේ. APR ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය 18 cm වේ නම් AB දිග සොයන්න.



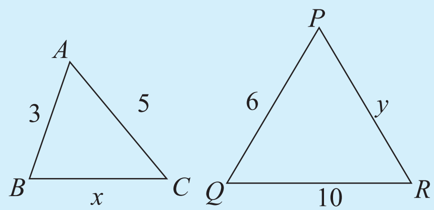
12. හිස්තැනට සුදුසු ත්‍රිකෝණ වර්ගය සුළුකෝණී ද, සෘජුකෝණී ද, මහා කෝණී ද යන්න ලියන්න.

(a) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය පාදයක් මත පිහිටන්නේ .... වර්ගයේ ත්‍රිකෝණවලය

(b) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයෙන් පිටත පිහිටන්නේ .... වර්ගයේ ත්‍රිකෝණවලය

(c) පරිවෘත්ත කේන්ද්‍රය ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තරයේ පිහිටන්නේ .... වර්ගයේ ත්‍රිකෝණවලය

13. ABC හා PQR සමකෝණික ත්‍රිකෝණනම් x හා y සොයන්න.



14. $4x + 3 \geq 8$ අසමානතාව සපුරාලන x හි නිඛිලය විසඳුම් සංඛ්‍යා රේඛාවක් මත නිරූපණය කරන්න.

15. $y = x^2 + 5x + 9$ ශ්‍රිතයෙහි ප්‍රස්තාරයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ප්‍රස්තාරය ඇඳීමෙන් තොරව ලියා දක්වන්න.

II කොටස

1. ABC ඍජුකෝණී ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 90^\circ$ වේ.

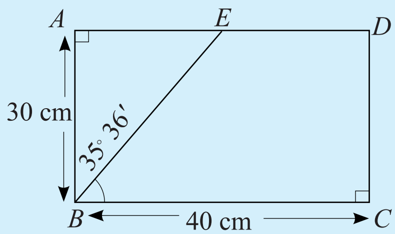
(i) P යනු BC පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය විට $4(AP^2 - AB^2) = BC^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) Q යනු AB පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය විට $4(CQ^2 - BC^2) = AB^2$ බව පෙන්වන්න.

(iii) ඉහත ලබාගත් (i) හා (ii) ප්‍රතිඵල භාවිතයෙන් $4(AP^2 + CQ^2) = 5\,AC^2$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iv) ඉහත ABC ත්‍රිකෝණය සමද්විපාද ඍජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් විට (iii) හි ලබාගත් ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $AP:QP = \sqrt{5} : \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

2. (a)



$ABCD$ ඍජුකෝණාස්‍රයකි. ත්‍රිකෝණමිතික වගු භාවිතයෙන්,

(i) AE දිග සොයන්න.

(ii) $BCDE$ ත්‍රැපීසියමේ පරිමිතිය ගණනය කරන්න.

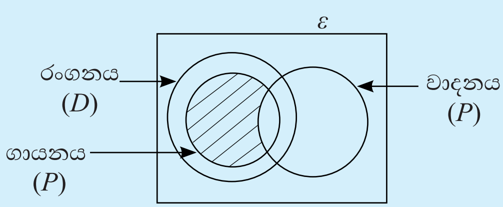
(b) A, B, C නම් නගර තුන පිහිටා ඇත්තේ A නගරයේ සිට දිගංශය 040° හා 50 km දුරින් B නගරය ද, B නගරයේ සිට දිගංශය 270° ක් හා Aට හරි උතුරින් C නගරය ද පිහිටන පරිදි ය.

(i) සුදුසු දළ රූපයක් ඇඳ ඉහත දක්වන ලද තොරතුරු එහි ලකුණු කරන්න.

(ii) A නගරයේ සිට C නගරයට දුර සොයන්න.

(iii) මෙම නගර තුනට ම ජලය සැපයීම සඳහා ජලය එක් රැස්කළ හැකි විශාල ජල ටැංකියක් සහිත කුළුණක් ඉදිකිරීමට අවශ්‍ය ව ඇති අතර කුළුණේ සිට එක් එක් නගරය වෙත ජලය සපයන ජලනලවල දිග සමාන වන පරිදි එය ඉදිකිරීමට සුදුසු ස්ථානය ඉහත රූපයේ T ලෙස නම් කර දක්වන්න.

3. සිසුන් 160ක් සහභාගී වූ සංදර්ශනයකට දායකත්වය දුන් සිසුන් පිළිබඳ තොරතුරු පහත දැක්වේ.



චාරිකාවට සහභාගී වූ මුළු පිරිසෙන් $\frac{1}{4}$ ක් රංගනය, වාදනය හා ගායනය යන අංශවලින් එක් අංශයකට හෝ සහභාගී වූහ. වාදනයට හා රංගනයට සහභාගී වූ 16 දෙනෙකු අතුරින් 6 දෙනෙකු ගායනයට ද සහභාගී විය. වාදනයට පමණක් සහභාගී වූ අය මෙන් දෙගුණයක් ගායනය හා රංගනයට පමණක් ද, පස්ගුණයක් රංගනයට පමණක් ද සහභාගී වූහ.

මෙහි ඉදිරිපත් කර ඇති වෙන්රූප සටහන ඔබේ අභ්‍යාස පොතේ පිටපත් කර අදාළ ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

(i) ඉහත තොරතුරු වෙන් රූප සටහන තුළ නිවැරදි ව සටහන් කරන්න. රංගනය, ගායනය හා වාදනය යන අංශ තුනට ම සහභාගී වූ පිරිස කොපමණ ද?

(ii) වාදනයට පමණක් සහභාගී වූ පිරිස කොපමණ ද?

(iii) එක් අංගයකට පමණක් සහභාගී වූ පිරිස මුළු පිරිසෙන් භාගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න.

(iv) $(S' \cap D) \cap P$ මගින් නිරූපණය වන කුලකයට අයත් පිරිස කුමන අංගයක් සඳහා සහභාගී වූයේ දැයි විස්තර කරන්න. එම සිසුන් සංඛ්‍යාව කොපමණ ද?

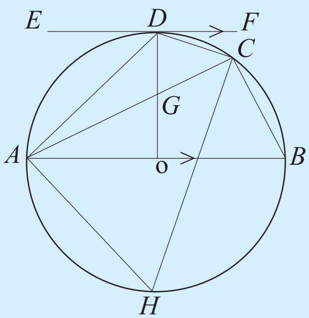
(v) වෙන් රූප සටහනේ අඳුරු කර ඇති ප්‍රදේශය අදාළ සංකේත හා කුලක අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

4. A හා B භාජන දෙකකට වර්ණය අසමාන සර්වසම බෝල දමා ඇත. A භාජනයේ කළු බෝල 3ක් ද, සුදු බෝල 2ක් ද ඇත. B භාජනයේ කළු බෝල 2 හා සුළු බෝල 3ක් ඇත. පුද්ගලයෙකු A භාජනයෙන් බෝලයක් ගෙන B භාජනයට දමා දෙවනුව B භාජනයේ බෝලයක් ඉවතට ගනී.

(i) ඉහත සිදුවීම්වලට අදාළ සම්භාවිතා දැක්වෙන රුක් සටහන අඳින්න.

(ii) රුක් සටහන ඇසුරෙන් වාර දෙකේ දී ම එකම වර්ණයෙන් යුත් බෝලයක් ලැබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

5.



රූපයේ දැක්වෙන පරිදි O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ AB යනු විෂ්කම්භයකි. වෘත්තයට D හි දී ඇඳි EF ස්පර්ශකය AB ට සමාන්තර වේ.

(i) $A\hat{B}D$ ට සමාන කෝණ දෙකක් ලියා දක්වන්න.

(ii) $E\hat{D}O$ හි අගය සොයන්න.

(iii) $OBCG$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.

6. කවකටුව, mm/cm පරිමාණය සහිත සරල දාරය භාවිත කර නිර්මාණ රේඛා පැහැදිලි ව දක්වමින්,

(i) $AB = 8$ cm, $A\hat{B}C = 90^\circ$ ද $BC = 4$ cm වන පරිදි ABC ත්‍රිකෝණය නිර්මාණය කරන්න.

(ii) $DC = 2$ cm හා DC හා AB සමාන්තර වන පරිදි $ABCD$ ත්‍රැපීසියම නිර්මාණය කරන්න.

(iii) දික්කරන ලද CB පාදය D හි දී ද CA පාදය E හි දී ද AB පාදය F හි දී ද බාහිරින් ස්පර්ශ කරන වෘත්තය ඇඳ දක්වන්න.

ලඝුගණක
மடக்கைகள்
LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ලඝුගණක

மடக்கைகள்

LOGARITHMS

											මධ්‍යන්‍ය අන්තර இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494	.0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669	.0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843	.0872	85	3	6	9	12	15	17	20	23	26
5	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190	.1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.334	.1363	.1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536	.1564	81	3	6	9	11	14	17	20	23	26
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708	.1736	80°	3	6	9	11	14	17	20	23	26
10°	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880	0.1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051	.2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221	.2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391	.2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560	.2588	75	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728	0.2756	74	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896	.2924	73	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062	.3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228	.3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393	.3420	70	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20°	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719	.3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22	24
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881	.3907	67	3	5	8	11	13	16	19	21	24
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041	.4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200	.4226	65	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	.4348	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514	.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669	.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823	.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975	.5000	60°	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30°	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275	.5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422	.5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568	.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712	.5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995	.6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134	.6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271	.6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406	.6428	50°	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40°	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539	0.6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670	.6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799	.6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	.6820	.6841	.6862	.6848	.6905	.6926	.6947	46	2	4	6	8	11	13	15	17	19
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050	.7071	45	2	4	6	8	10	12	15	17	19
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති සයින
இயற்கைச் சைன்கள்
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44°	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294	.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412	.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528	.7547	41	2	4	6	8	10	12	13	15	17
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642	.7660	40°	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50°	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862	.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969	.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073	.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175	.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	14	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371	.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	.8387	.8403	.8418	.8434	.8450	.8465	.8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557	.8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646	.8660	30°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816	.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	12
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897	.8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975	.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051	.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124	0.9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194	.9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261	.9272	22	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325	.9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387	.9397	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70°	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502	.9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555	.9563	17	1	2	3	4	4	5	6	7	8
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605	.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652	.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737	.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775	.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811	.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843	.9848	10°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80°	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922	.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942	.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959	.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	3
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4									
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985	.9986	3									
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993	.9994	2									
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998	.9998	1									
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

මධ්‍යන්‍ය අන්තරය / இடை வித்தியாசங்கள் / Mean Differences

(අන්තරය ඉතා කුඩා බැවින් වගු ගත කිරීම අනවශ්‍යය.)

ප්‍රකෘති කෝසයින
இயற்கைக் கோசைன்கள்
NATURAL COSINES

ප්‍රකෘති ටැංජන
இயற்கைத் தான்சன்கள்
NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences								
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89°	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320	.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495	.0524	87	3	6	9	12	15	18	20	23	26
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670	.0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	.0699	.0729	.0758	.0787	.0816	.0846	.0875	85	3	6	9	12	15	18	21	23	26
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.1051	84	3	6	9	12	15	18	21	24	26
6	.1051	.1080	.1110	.1139	.1169	.1198	.1228	83	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	.1228	.1257	.1287	.1317	.1346	.1376	.1405	82	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554	.1584	81	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1733	.1763	80°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10°	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.1944	79	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	.1944	.1974	.2004	.2035	.2065	0.2095	0.2126	78	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2247	.2278	.2309	77	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2462	.2493	76	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	.2493	.2524	.2555	.2586	.2617	.2648	.2679	75	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	.2867	.2899	.2931	.2962	.2994	.3026	.3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217	.3249	72	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411	.3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	.3443	.3476	.3508	.3541	.3574	.3607	.3640	70°	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20°	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006	.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210	.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417	.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628	.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059	.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280	.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	30	33
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505	.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735	.5774	60°	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30°	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208	.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453	.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703	.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959	.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	40
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490	.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766	.7813	52	5	9	14	19	23	28	32	37	42
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050	.8098	51	5	10	14	19	24	29	33	38	43
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342	.8391	50°	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40°	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.8693	49	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952	.9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271	.9325	47	5	11	16	21	27	32	37	43	48
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601	.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	.9657	.9731	.9770	.9827	.9884	.9942	1.0000	45	6	11	17	23	29	34	40	46	51
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

ප්‍රකෘති කෝටැංජන
இயற்கைக் கோதான்சன்கள்
NATURAL COTANGENTS

ප්‍රකෘති ටැංජන

இயற்கைத் தான்கள்

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′	මධ්‍යන්‍ය අන්තරය இடை வித்தியாசங்கள் Mean Differences	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295	1.0355	44°	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	.0355	.0416	.0477	.0538	.0599	.0661	.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	.0724	.0786	.0850	.0913	.0977	.1041	.1106	42	6	13	19	26	32	38	45	51	57
48	.1106	.1171	.1237	.1303	.1369	.1436	.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	60
49	.1504	.1571	.1640	.1708	.1778	.1847	.1918	40°	7	14	21	28	34	41	48	55	62
50°	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39	7	14	22	29	36	43	50	58	65
51	.2349	.2423	.2497	.2572	.2647	.2723	.2799	38	8	15	23	30	38	45	53	60	68
52	.2799	.2876	.2954	.3032	.3111	.3190	.3270	37	8	16	24	31	39	47	55	63	71
53	.3270	.3351	.3432	.3514	.3597	.3680	.3764	36	8	16	25	33	41	49	58	66	74
54	.3764	.3848	.3934	.4019	.4106	.4193	.4281	35	9	17	26	35	43	52	60	69	78
55	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.4733	1.4826	34	9	18	27	36	45	54	63	73	82
56	.4826	.4919	.5013	.5108	.5204	.5301	.5399	33	10	19	29	38	48	57	67	76	86
57	.5399	.5497	.5597	.5697	.5798	.5900	.6003	32	10	20	30	40	50	60	71	81	91
58	.6003	.6107	.6212	.6319	.6426	.6534	.6643	31	11	21	32	43	53	64	75	85	96
59	.6643	.6753	.6864	.6977	.7090	.7205	.7321	30°	11	23	34	45	56	68	79	90	102
60°	1.732	1.744	1.756	1.767	1.780	1.792	1.804	29	1	2	4	5	6	7	8	10	11
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28	1	3	4	5	6	8	9	10	12
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27	1	3	4	5	7	8	10	11	12
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26	1	3	4	6	7	9	10	12	13
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21	2	4	6	9	11	13	15	17	20
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20°	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70°	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	23
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172	3.204	3.237	3.271	17	3	6	10	13	16	19	23	26	29
73	3.271	3.305	3.340	3.376	3.412	3.450	3.487	16	4	7	11	14	18	22	25	29	32
74	3.487	3.526	3.566	3.606	3.647	3.689	3.732	15	4	8	12	16	20	24	29	33	37
75	3.732	3.776	3.821	3.867	3.914	3.962	4.011	14	5	9	14	19	23	28	33	37	42
76	4.011	4.061	4.113	4.165	4.219	4.275	4.331	13	5	11	16	21	27	32	37	43	48
77	4.331	4.390	4.449	4.511	4.574	4.638	4.705	12	6	12	19	25	31	37	44	50	56
78	4.705	4.773	4.843	4.915	4.989	5.066	5.145	11	7	15	22	29	37	44	51	59	66
79	5.145	5.226	5.309	5.396	5.485	5.576	5.671	10°	9	18	26	35	44	53	61	70	79
80°	5.671	5.769	5.871	5.976	6.084	6.197	6.314	9									
81	6.314	6.435	6.561	6.691	6.827	6.968	7.115	8									
82	7.115	7.269	7.429	7.596	7.770	7.953	8.144	7									
83	8.144	8.345	8.556	8.777	9.010	9.255	9.514	6									
84	9.514	9.788	10.078	10.385	10.712	11.059	11.430	5									
85	11.43	11.83	12.25	12.71	13.20	13.73	14.30	4									
86	14.30	14.92	15.60	16.35	17.17	18.07	19.08	3									
87	19.08	20.21	21.47	22.90	24.54	26.43	28.64	2									
88	28.64	31.24	34.37	38.19	42.96	49.10	57.29	1									
89	57.29	68.75	85.94	114.59	171.89	343.77	∞	0°									
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

(For 80°–89°:)

අන්තර ශීඝ්‍රයෙන් වෙනස් වෙයි

வித்தியாசங்கள் விரைந்து மாறுவன

Differences change rapidly

ප්‍රකෘති කෝටැංජන

இயற்கைக் கோதான்சன்கள்

NATURAL COTANGENTS

පාරිභාෂික ශබ්ද මාලාව

අ

අසමානතා	சமனிலிகள்	Inequalities
අනුමේයයන්	ஏறிகள்	Riders
අභ්‍යන්තර සම්මුඛ කෝණය	அகத்தெதிர் கோணம்	Interior opposite angle
අරය	ஆரை	Radius
ආපාතිත	எதிரமை	Subtended
අවයව	மூலகம்	Element
අන්තර්වෘත්තය	உள்வட்டம்	Inscribed circle

ඒ

ඒකක න්‍යාසය	அலகுத் தாயம்	Unit matrix
ඒකාන්තර වෘත්ත ඛණ්ඩය	ஒரேதுண்டக் கோணங்கள்	Angles in the same segment

සෘ

සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණ	செங்கோண முக்கோணம்	Right angled triangles

ක

කර්ණය	செம்பக்கம்	Hypotenuse
කෝසයිනය	கோசைன்	Cosine
කේන්ද්‍රය	மையம்	Centre
කුලකය	தொடை	Set
කුලක ඡේදනය	தொடைகளின் இடைவெட்டு	Intersection of sets
කුලක මේලය	தொடைகளின் ஒன்றிப்பு	Union of sets
කොටු දැල	நெய்யரி	Grid

ජ

ජ්‍යාය	நாண்	Chord

ට

ටැංජනය	தொடலி	Tangent

ත

ත්‍රිකෝණමිතිය	திரிகோண கணிதம்	Trignometry
ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත	திரிகோண கணித விகிதங்கள்	Trignometric Ratios
තීර න්‍යාසය	நிரற் தாயம்	Column matrix

න

න්‍යාස	தாயங்கள்	Matrices
න්‍යාසයේ ගණය	தாயத்தின் வரிசை	Order of a matrix
න්‍යාසයක අවයව	தாயமொன்றின் மூலகங்கள்	Elements of a matrix
නියැදි අවකාශය	மாதிரிவெளி	Sample space

ප

පයිතගරස් ප්‍රමේයය	பைதகரசின் தேற்றம்	Pythagoras' theorem
පයිතගරස් ත්‍රික	பைதகரசின் மும்மை	Pythagoras' triple
පේළි න්‍යාසය	நிரைத் தாயம்	Row matrix
පරිපූරක	மிகை நிரப்புகின்ற	Supplementary
පථය	ஒழுக்கு	Locus
පරිවෘත්තය	சுற்று வட்டம்	Circumcircle
පරායත්ත සිද්ධි	சார் நிகழ்ச்சி	Dependent Events

බ

බද්ධ පාදය	அயற் பக்கம்	Adjacent side
බාහිර කෝණය	புறக்கோணம்	Exterior angle
බාහිර ලක්ෂ්‍යය	புறப்புள்ளி	Exterior point
බාහිර වෘත්තය	வெளி வட்டம்	Outer Circle

ර

රුක් සටහන	மரவரிப்படம்	Tree Diagram

ල

ලම්බකය	செங்குத்து	Perpendicular
ලක්ෂ්‍යය	புள்ளி	Point

ව

විසඳුම් කුලකය	தீர்வுத் தொடை	Solution set
වෘත්ත චතුරස්‍ර	வட்ட நாற்பக்கல்	Cyclic Quadrilateral
වෘත්තය	வட்டம்	Circle
වෘත්ත ඛණ්ඩය	வட்டத்துத்துண்டம்	Segment of a circle
වෙන් රූපය	வென் வரிப்படம்	Venn diagram

ස

සම්මුඛ පාදය	எதிர்ப் பக்கங்கள்	Opposite side
සයිනය	சைன்	Sine
සමචතුරස්‍ර න්‍යාසය	சதுரத் தாயம்	Square matrix
සමමිතීය න්‍යාසය	சமச்சீர்த் தாயம்	Symmetric matrix
සම්මුඛ කෝණ	எதிர்க் கோணங்கள்	Opposite angles
ස්පර්ශකය	தொடலி	Tangent
සසම්භාවී පරීක්ෂණ	எழுமாற்றுப் பரிசோதனை	Randam Experiments
ස්වායත්ත සිද්ධි	சாரா நிகழ்ச்சிகள்	Independent events

පාඩම් අනුක්‍රමය

පෙළපොතේ පරිච්ඡේදය	කාලච්ඡේද ගණන
1 වාරය	
1. තාත්වික සංඛ්‍යා	10
2. දර්ශක හා ලඝුගණක I	08
3. දර්ශක හා ලඝුගණක II	06
4. ඝන වස්තුවල පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය	05
5. ඝන වස්තුවල පරිමාව	05
6. ද්විපද ප්‍රකාශන	04
7. වීජීය භාග	04
8. සමාන්තර රේඛා අතර තලරූපවල වර්ගඵලය	12
2 වාරය	
09. ප්‍රතිශත	06
10. කොටස් වෙළෙඳ පොළ	05
11. මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයය	05
12. ප්‍රස්තාර	12
13. සමීකරණ	10
14. සමකෝණික ත්‍රිකෝණ	12
15. දත්ත නිරූපණය හා අර්ථකථනය	12
16. ගුණෝත්තර ශ්‍රේඪි	06
3 වාරය	
17. පයිතගරස් ප්‍රමේයය	04
18. ත්‍රිකෝණමිතිය	12
19. න්‍යාස	08
20. අසමානතා	06
21. වෘත්ත චතුරස්‍ර	10
22. ස්පර්ශක	10
23. නිර්මාණ	05
24. කුලක	06
25. සම්භාවිතාව	07